

数学实验



最优化基础、MATLAB优化工具箱简介

一、最优化简介

- 最优化是近几十年形成的一门学科，它主要运用数学方法寻找待优化问题的最佳决策方案，为决策者提供科学依据。
- 最优化方法已经在经济管理，科学计算、工程设计等领域得到了广泛地应用。
- 从数学上讲，最优化方法就是求解一元或多元函数的极小值或最小值的计算方法。

二、最优化数学模型

$$\min f(x_1, \cdots, x_n)$$

s.t.

$$h_i(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, m;$$

$$g_j(x_1, \cdots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

二、最优化数学模型

目标函数

$$\min f(x_1, \cdots, x_n)$$

s.t.

$$h_i(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, m;$$

$$g_j(x_1, \cdots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

三、最优化数学模型

极小化

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

s.t.

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

三、最优化数学模型

受限制于

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

s.t.

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

三、最优化数学模型

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

s.t.

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

等式约束

三、最优化数学模型

$$\begin{aligned} & \min f(x_1, \dots, x_n) \\ & s.t. \\ & \quad h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ & \quad g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

不等式约束

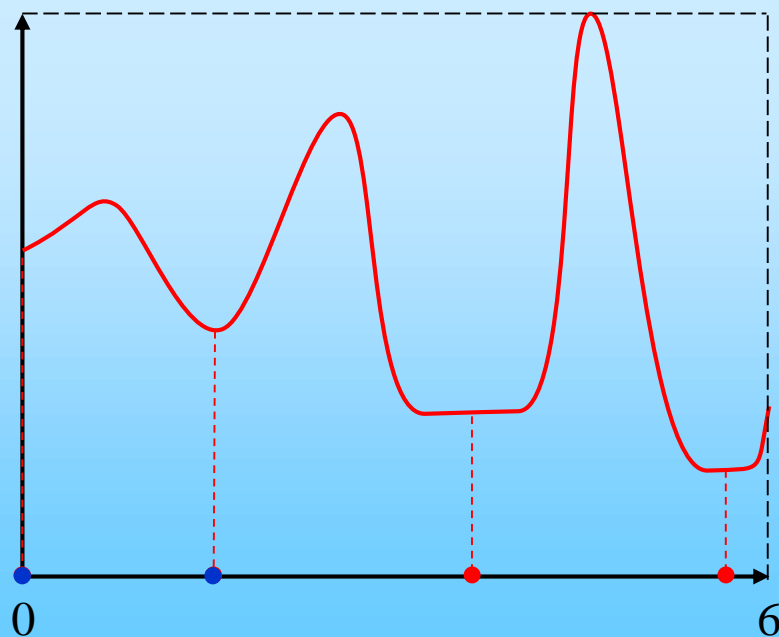
四、迭代下降算法

- (1) 首先给出目标函数 $f(X)$ 的一个初始迭代点 X^k , 置 $k = 0$;
- (2) 然后按照一定规则产生 X^k 处的一个下降方向 P^k ;
- (3) 再沿方向 P^k 搜索得到下一个迭代点 X^{k+1} , 使得 $f(X^{k+1}) < f(X^k)$;
- (4) 若满足停机条件则算法终止迭代, 并输出 X^k ; 否则置 $k = k+1$, 转步骤(2)。

按照上面的过程, 一般会产生一个收敛的迭代序列 $\{X^k\}$ 。在实际计算中, 若满足停机条件, 则将当前迭代点当作准确解的近似值。

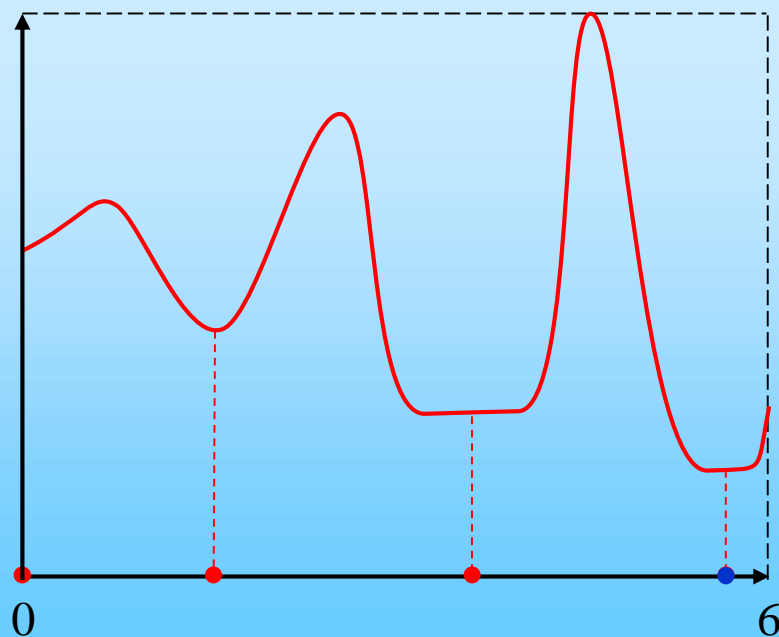
五、局部极小点和全局极小点

设 $f: D \subset R^n \rightarrow R$, 若存在 $X^* \in D$ 及实数 $\delta > 0$, 使得 $\forall X \in N^0(X^*, \delta) \cap D$ 都有 $f(X^*) \leq f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的局部极小点; 若 $f(X^*) < f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的局部严格极小点。



五、局部极小点和全局极小点

设 $f: D \subset R^n \rightarrow R$, 若存在 $X^* \in D$, 若对 $\forall X \in D$, 都有 $f(X^*) \leq f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的**全局极小点**; 若 $f(X^*) < f(X)$, 则称 X^* 为 $f(X)$ 的**全局严格极小点**。



注:

极小点处的函数
值称为**极小值**。

极小点(值)也称为
最优解(值)。

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

fminbnd()

解释:

求单变量无约束（箱约束，边界约束）最优化问题

数学模型:

$$\min_{x_1 \leq x \leq x_2} f(x)$$

算法:

黄金分割法，抛物线插值法

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

fminsearch()

解释:

求解多变量无约束最优化问题

数学模型:

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

算法:

基于免导数的算法: Nelder-Mead单纯形方法

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

fminunc()

解释:

求解多变量无约束最优化问题

数学模型:

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

算法:

基于导数的算法: 拟牛顿方法、信赖域方法

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

fmincon()

解释:

求解多变量有约束最优化问题

数学模型:

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

$$s.t. \quad h_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, m;$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

算法:

信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

linprog()

解释:

求解线性规划问题

数学模型:

$$\min C^T X$$

$$s.t. \quad AX = b$$

$$X \geq 0$$

算法:

内点法、（对偶）单纯形法、有效集法

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

intlinprog()

**MATLAB r2014b
及其以后版本**

解释:

求解混合整数线性规划问题

数学模型:

$$\min C^T X$$

$$s.t. \quad AX = b; X \geq 0$$

$$\exists x_i \in Z$$

算法:

分支定界法

六、MATLAB优化工具箱中主要命令

命令:

`ga()`

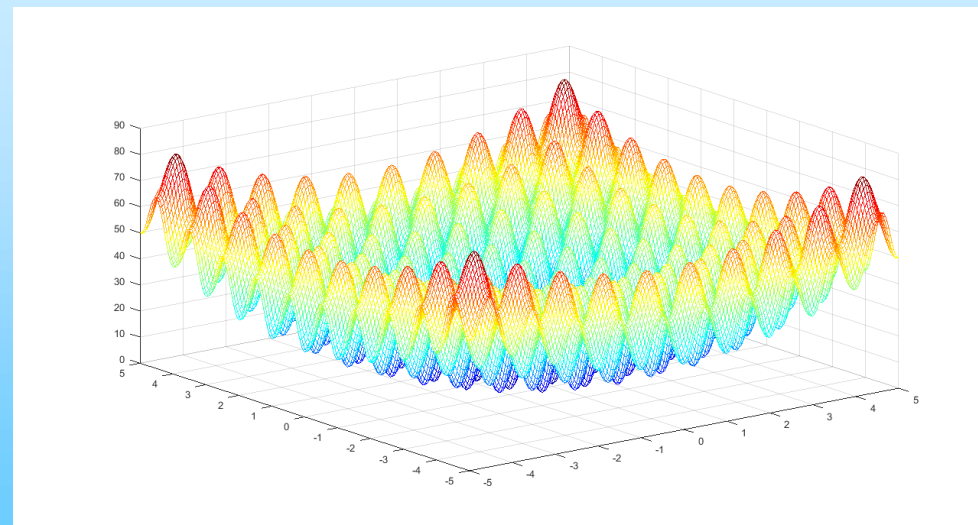
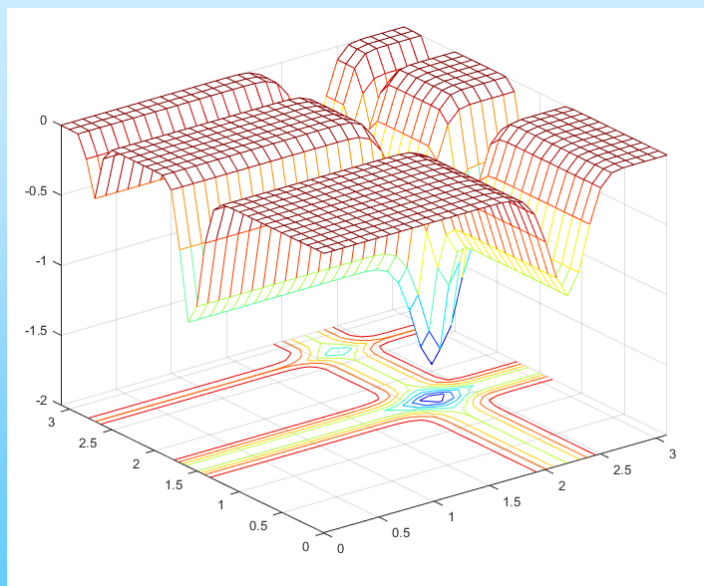
MATLAB r2008a
及其以后版本

解释:

求解困难、复杂、多态最优化问题的全局最优解

算法:

遗传算法



MATLAB优化工具箱主要命令简介

命令名	解释	命令名	解释
fminbnd()	求 单变量无约束（箱约束，边界约束） 最优化问题 黄金分割法，抛物线插值法	linprog()	求解线性规划问题 内点法、（对偶）单纯形法、有效集法
fmincon()	求解 多变量有约束 最优化问题 信赖域法、有效集法、内点法、序列二次规划	bintprog()	求解 0-1 整数规划问题 Matlab r2014b及其以后版本中已被intlinprog代替。
fminsearch()	求解 多变量无约束 最优化问题 基于免导数的算法：Nelder-Mead单纯形方法	fminunc()	求解 多变量无约束 最优化问题 基于导数的算法：拟牛顿方法、信赖域方法
ga()	求解 困难、复杂、多态 最优化问题的全局最优解 遗传算法 Matlab r2008a及其以后版本	intlinprog()	求解混合整数线性规划问题 分支定界法 Matlab r2014b及其以后版本