
Εργαστήριο 2

Authors:

Ισίδωρος Πατεράκης AM: 2017030091

Μαρίνου Ιωάννα AM: 2016030143

Σπυριδάκης Χρήστος AM: 2014030022

LAB30242846

November 19, 2019



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΚΡΗΤΗΣ**

Άσκηση 1

Αρχικά το σύστημα το οποίο μας δίνεται απεικονίζεται παρακάτω, ενώ ξέρουμε ότι είναι ένα αιτιατό, γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση. Επίσης γνωρίζουμε ότι για τη συχνότητα δειγματοληψίας ισχύει ότι $f_s = 1\text{Hz}$. Τέλος, αναφέρεται ότι το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$ και το $G_2(z) = \frac{1}{z+0.2}$.

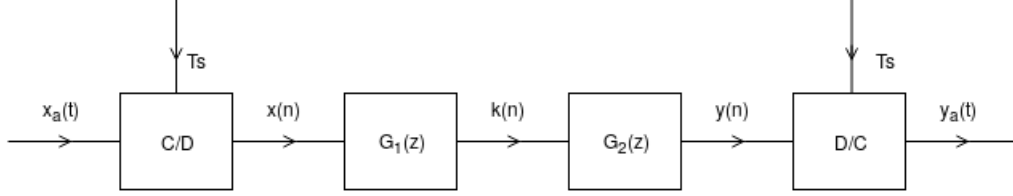


Figure 1: Given system

a)

Για το πρώτο μέρος σχετικά με την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς σε Z-Transform γνωρίζουμε ότι ένα LTI system μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τη χρονική απόκριση σε Z-Transform ή εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ως το πηλίκο εξόδου προς εισόδου του, άρα για όλο του συστήματος που ζητείται ισχύει:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1)$$

Μη γνωρίζοντας άμεσα ούτε το $Y(z)$ ούτε το $X(z)$ πρέπει να βρούμε μέσα από τα δεδομένα ένα τρόπο να τα υπολογίσουμε. Ξέρουμε όμως ότι συνελλίξεις στο πεδίο του χρόνου είναι πολλαπλασιασμοί στο πεδίο Z οπότε βλέπουμε ότι:

$$k(n) = x(n) \otimes g_1(n) \xrightarrow{Z} X(z)G_1(z) = K(z) \Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{K(z)}{G_1(z)}} \quad (2)$$

$$y(n) = k(n) \otimes g_2(n) \xrightarrow{Z} K(z)G_2(z) = Y(z) \Rightarrow \boxed{Y(z) = K(z)G_2(z)} \quad (3)$$

Από τις εξισώσεις (1) , (2) και (3) καταλήγουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ισούται:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{K(z)G_2(z)}{\frac{K(z)}{G_1(z)}} \\ &= \boxed{G_1(z)G_2(z)} \end{aligned} \quad (4)$$

Το $G_2(z)$ μας δίνεται, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε και το $G_1(z)$. Ξέρουμε ότι το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$ άρα πρώτο βήμα είναι να δημιουργούμε τον Z-Transform του $k(n)$. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο.

$$K(z) = 0.9z^{-1}K(z) + 0.2X(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{K(z) = \frac{0.2X(z)}{1 - 0.9z^{-1}}} \quad (5)$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι στην (5) εμφανίζεται το $X(z)$ συνεπώς από την (5) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\boxed{G_1(z) = \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}}} \quad (6)$$

Πλέον έχουμε ότι χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή το $G_1(z)$ και το $G_2(z)$ άρα:

$$\begin{aligned} H(z) &= G_1(z)G_2(z) \\ &= \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}} * \frac{1}{z + 0.2} \\ &= \frac{0.2}{(1 - 0.9z^{-1})(z + 0.2)} \\ &= \frac{0.2}{z - 0.9 + 0.2 - 0.18z^{-1}} \\ &= \frac{0.2}{z - 0.7 - 0.18z^{-1}} \\ &= \boxed{\frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}}} \end{aligned} \quad (7)$$

Όσον αφορά την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) - 0.7z^{-1}Y(z) - 0.18z^{-2}Y(z) = 0.2z^{-1}X(z)$$

Έπειτα υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z.

$$y(n) - 0.7y(n-1) - 0.18y(n-2) = 0.2x(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(n) = 0.7y(n-1) + 0.18y(n-2) + 0.2x(n-1)} \quad (8)$$

b)

Αφού είχαμε βρει την συνάρτηση μεταφοράς, μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα πόλων - μηδενικών με την βοήθεια του MATLAB και της συνάρτησης `zplane` στην οποία θα δίναμε ορίσματα τους συντελεστές των πολωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή προσέχοντας να είναι συσχετισμένοι οι βαθμοί των πολωνύμων.

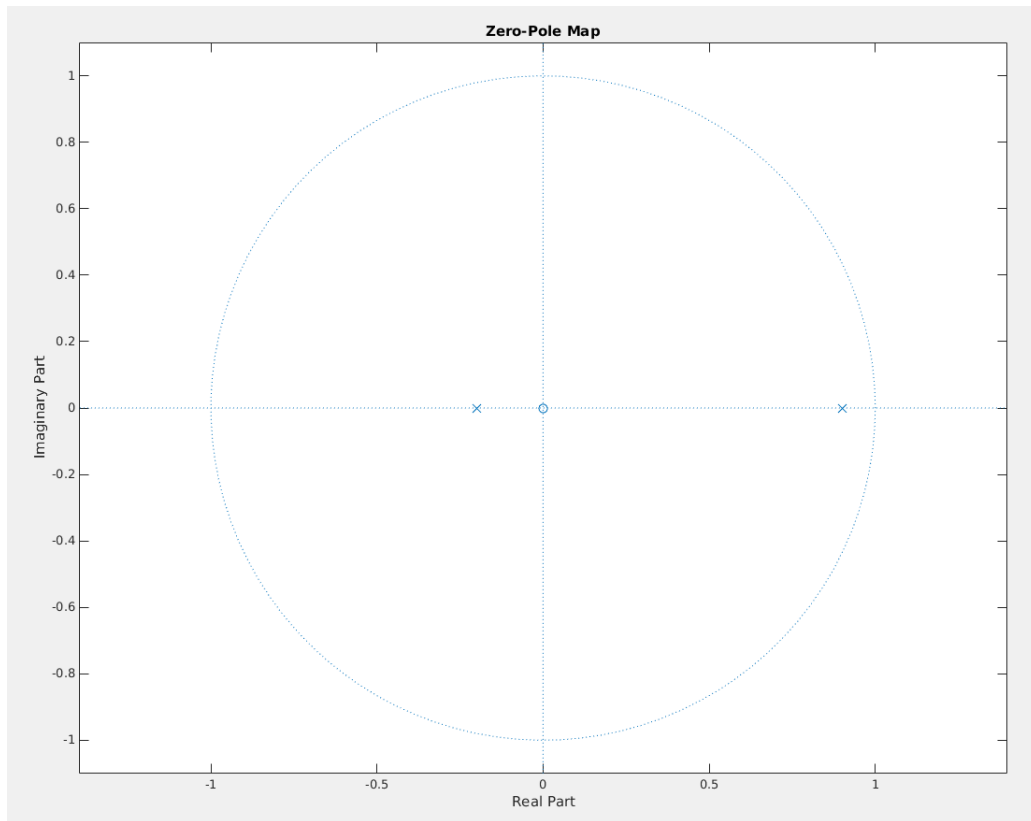


Figure 2: Pole-Zero map on Matlab

c)

Για να είναι BIBO ευσταθές το σύστημα, όπως έχουμε δει και από την θεωρία πρέπει να ισχύει ότι ο ROC (Region of convergence) περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο ($|z| = 1$). Γενικά ξέρουμε ότι η περιοχή σύγκλισης ορίζεται μόνο από τους πόλους. Επίσης ξέρουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό πράγμα που σημαίνει ότι είναι σίγουρα δεξιόπλευρο. Άρα η περιοχή σύγκλισης του ξεκινάει από ένα κύκλο και εκτείνεται προς το $\pm\infty$ (εξωτερική πλευρά κύκλου με ακτίνα $|r_1|$).

Από τα παραπάνω η περιοχή σύγκλισης ικανοποιεί την εξής σχέση $|z| > |r_1|$, με την χρήση του σχεδιαγράμματος μηδενικών - πόλων του β) ερωτήματος βλέπουμε ότι η τιμή του $r_1 = 0.9$ καθώς γνωρίζουμε ότι δεν μπορεί να περιέχονται πόλοι στη περιοχή σύγκλισης, συνεπώς περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος σε αυτή, άρα το σύστημα είναι BIBO ευσταθές.

d)

Παρατηρούμε ότι αν βάλουμε το διάστημα της συχνότητας ως τρίτο όρισμα στην freqz, παίρνουμε την συχνότητα στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (δηλαδή το διάστημα που εισάγαμε) ενώ αλλιώς στο $[0, \pi]$. Η απόκριση επηρεάζεται απ' τους πόλους ανάλογα με την απόστασή τους και την γωνία τους από το σημείο της συχνότητας στον μοναδιαίο κύκλο. Το πλάτος αυξάνεται όταν αυξάνεται η απόσταση ενός μηδενικού με το σημείο της συχνότητας και η φάση όταν αυξάνεται η γωνία. Ενώ με τους πόλους συμβαίνει το αντίθετο.

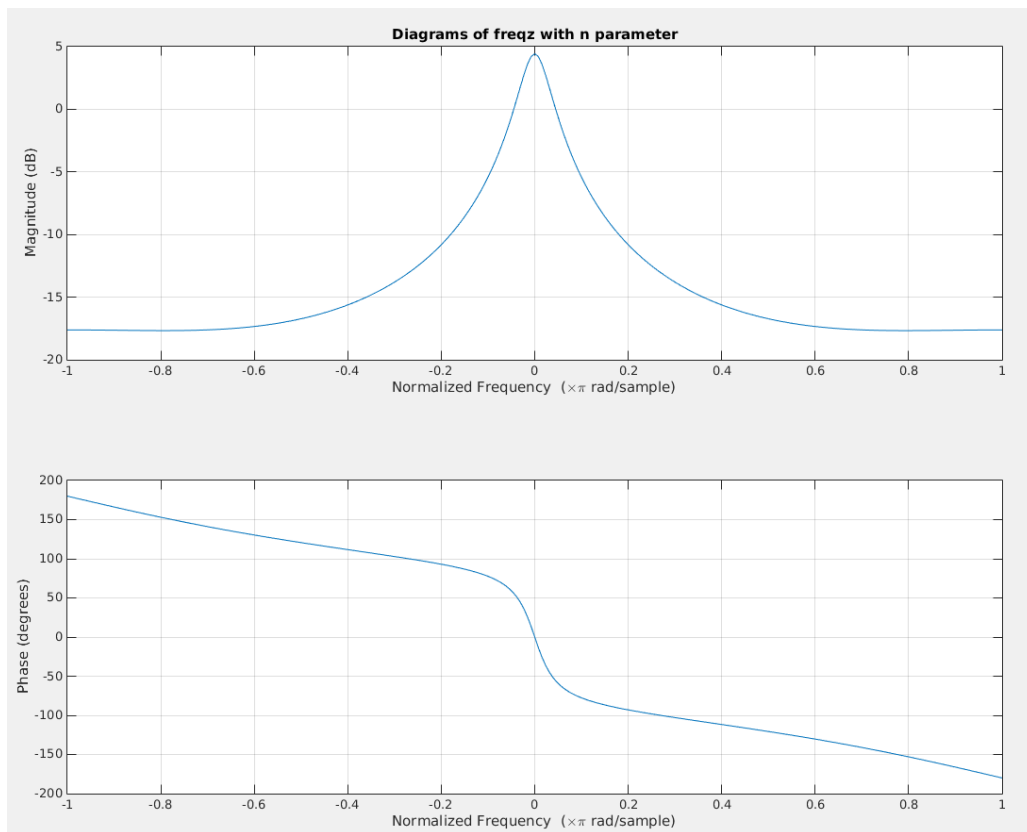


Figure 3: Matlab result - freqz μαζί με το τρίτο όρισμα

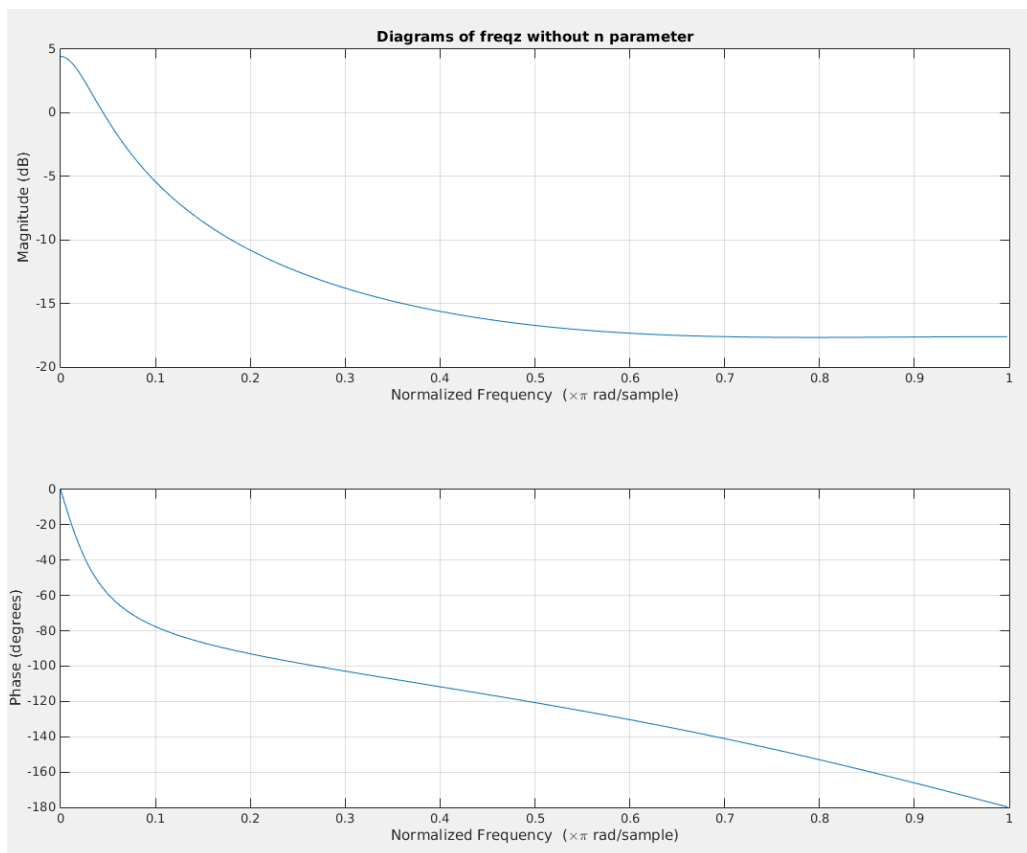


Figure 4: Matlab result - freqz χωρίς το τρίτο όρισμα

e)

Προσθέτοντας τον πόλο παρατηρούμε ότι το σύστημα χάνει την ευστάθεια του (οριακή συνθήκη αστάθειας $|z| = 1$). Περιμένουμε να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς απειρίζεται, όταν η συχνότητα πλησιάζει το μηδέν, το μέτρο πλησιάζει το άπειρο. Με τον επιπλέον πόλο έχουμε:

$$H_{z=1}(z) = \frac{0.2z^{-1}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.52z^{-1} + 0.18z^{-3}}$$

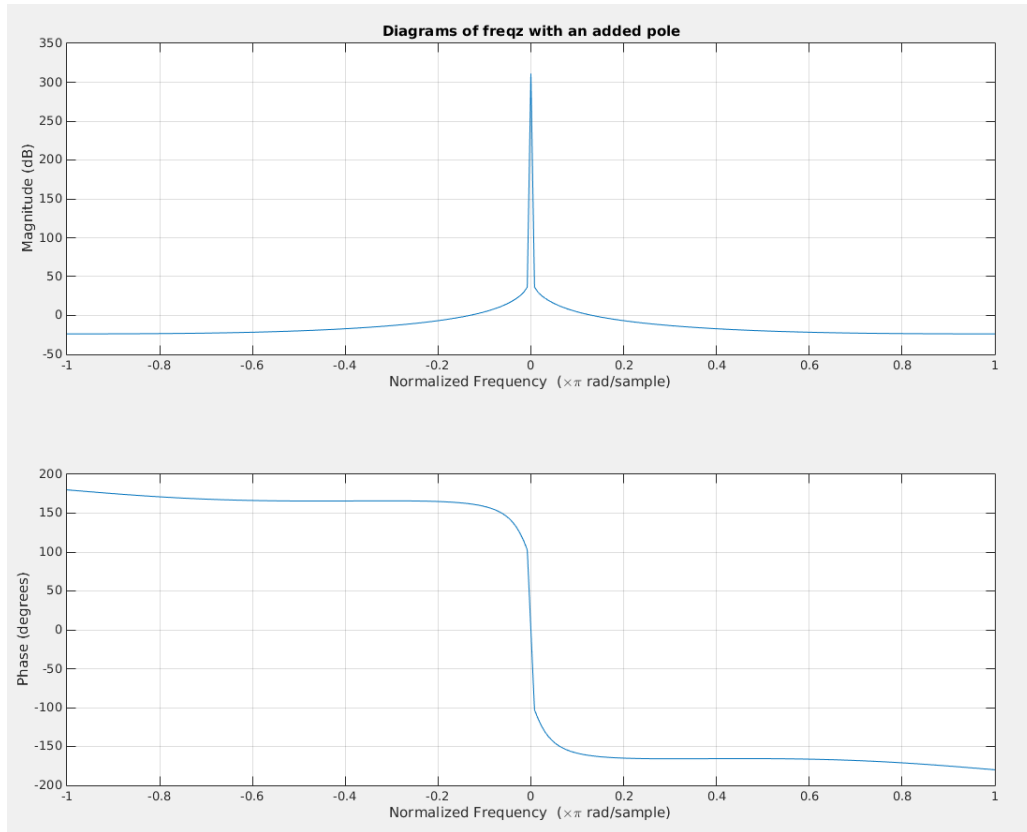


Figure 5: Matlab result

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 2$$

a)

Η θεωρητική ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς είναι η εξής:

Βρίσκονται οι πόλοι λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση. Σπάει ο αριθμητής και βρίσκονται οι συντελεστές του μέσω της μεθόδου χρήσης των A-B.

$$1 - 2.5z^{-1} + z^{-2} = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2.5)^2 - 4 * 1 * 1 = 6.25 - 4 = 2.25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2.25} = 1.5$$

$$p_{1,2} = \frac{2.5 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2} \Rightarrow p_1 = 2 \quad \text{and} \quad p_2 = 0.5$$

$$\begin{aligned}
\frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} &= \frac{A}{1 - p_1z^{-1}} + \frac{B}{1 - p_2z^{-1}} \\
&= \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.5z^{-1}} \\
&= \frac{A(1 - 0.5z^{-1}) + B(1 - 2z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \Leftrightarrow \\
A(1 - 0.5z^{-1}) + B(1 - 2z^{-1}) &= 4 - 3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
A - 0.5Az^{-1} + B - 2Bz^{-1} &= 4 - 3.5z^{-1} \Leftrightarrow \\
A + B - (0.5A + 2B)z^{-1} &= 4 - 3.5z^{-1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$A + B = 4 \Leftrightarrow A = 4 - B$$

$$0.5A + 2B = 3.5 \Leftrightarrow A + 4B = 7 \Leftrightarrow 4 - B + 4B = 7 \Leftrightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1 \quad \text{and} \quad A = 3$$

Άρα:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

```

zero_roots =

    3
    1

pole_roots =

    2.0000
    0.5000

k =

    0

    3      1
-----
    2      1
- - 1  - - 1
z      2 z

```

Figure 6: Matlab result

b)

Το σύστημα είναι αιτιατό για $|z| > 2$. Για δεξιόπλευρο όρο ισχύει η ιδιότητα:

$$\frac{k_i z}{z - a_i} \Leftrightarrow k_i a_i^n u(n)$$

Οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$3 * 2^n u(n) + 0.5^n u(n)$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται μέσω MATLAB:

Hz =

$$3 \cdot 2^n + (1/2)^n$$

Figure 7: Matlab result