ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

ΤΗΛ302: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Καθηγητής: Μιχάλης Ζερβάκης

2η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Α. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{με} \quad z = re^{j\omega}$$

Πρόκειται για τον DTFT μετασχηματισμό του σήματος

$$\tilde{x} = x(n) r^{-n}$$

Για να μην έχουμε άπειρη τιμή στον μετασχηματισμό z θέτουμε μία περιοχή ενδιαφέροντος:

R1<|z|<Rz

Για δεξιόπλευρη σειρά:

x(n)=0 για n<N1, $X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$

και περιοχή ενδιαφέροντος |z|>R1, όπου R1 είναι το μέτρο του πόλου που είναι μακρύτερα από το κέντρο του επιπέδου του z.

Για αριστερόπλευρη σειρά:

x(n)=0 για n>N2, $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$

με περιοχή ενδιαφέροντος |z|<R2, όπου R2 είναι το μέτρο του πόλου που είναι κοντύτερα στο κέντρο του επιπέδου του z.

Για αμφίπλευρη σειρά έχουμε:

x(n)=xL(n)+xR(n)

οπότε X(z)=XR(z)+XL(z), με περιοχή ενδιαφέροντος R1<|z|<R2, όπου R1 το μέτρο του πόλου του XR που είναι μακρύτερα από το κέντρο και R2 το μέτρο του πόλου του XL που είναι κοντύτερα στο κέντρο.

Β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου μπορεί να δοθεί με την εξής γενική εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό z έχουμε:

$$Y(z) = \left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right] = X(z) \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-k}$$

και

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Προσοχή στις αρνητικές δυνάμεις του z

π.χ. Όταν μας δίνεται $H(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + z + 2}$ τότε για να βρούμε εξίσωση διαφορών:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 + z + 2}$$

Γ. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΙΤΙΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα σύστημα h(n) είναι **αιτιατό** (causal) αν:

h(n)=0, για n<0

Αυτό σημαίνει ότι το h(n) είναι δεξιόπλευρη σειρά και άρα περιοχή σύγκλισης για τον H(z) είναι μία περιοχή |z|>R1.

Ένα σύστημα είναι **ευσταθές** αν η κρουστική απόκριση είναι απόλυτα αθροίσιμη:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Το προηγούμενο είναι ισοδύναμο με:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty \text{, για } |z|=1$$

Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης ενός **ευσταθούς** συστήματος πρέπει να περιλαμβάνει το **μοναδιαίο κύκλο**. Π.χ.:

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές τότε η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$\frac{1}{2}<|z|<2$$

Το προηγούμενο σύστημα είναι αιτιατό για |z|>2.

4. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Η πιο πρακτική μέθοδος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού z είναι η μέθοδος της ανάπτυξης σε κλάσματα.
Με τη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να φέρουμε τον μετασχηματισμό στην εξής μορφή:

$$X(z)=\frac{k_1 z}{z-a_1}+\frac{k_2 z}{z-a_2}+.....+\frac{k_m z}{z-a_m}$$

Για αυτούς τους όρους έχουμε το εξής ζεύγος μετασχηματισμού z:

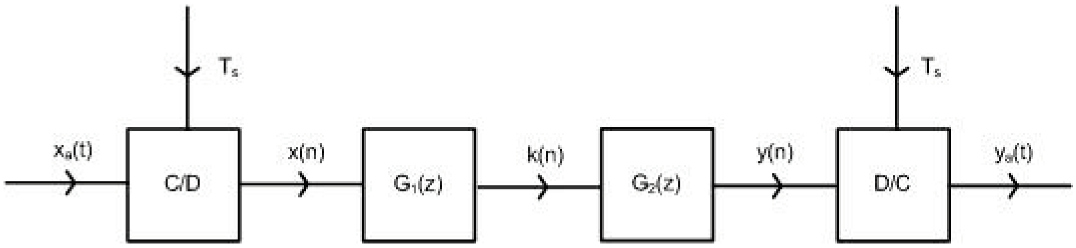
$$\frac{k_i z}{z-a_i}\Leftrightarrow k_i a_i^n u(n) \text{ για δεξιόπλευρο όρο και}$$

$$\frac{k_i z}{z-a_i}\Leftrightarrow -k_i a_i^n u(-n-1) \text{ για αριστερόπλευρο όρο}$$

Τι είδους όρο έχουμε μπορούμε να το δούμε από το σε ποια πλευρά της περιοχής σύγκλισης είναι ο πόλος του όρου.

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Δίνεται το αιτιατό, γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα του παρακάτω σχήματος, όπου ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 1 Hz, ενώ το $G_1(z)$ περιγράφεται από την εξ. διαφορών: $k(n)=0.9k(n-1)+0.2x(n)$ και το $G_2(z)=\dfrac{1}{z+0.2}$.



α) Βρείτε θεωρητικά (στην αναφορά) τη συνάρτηση μεταφοράς *H(z)* όλου του συστήματος καθώς και τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που συνδέει την είσοδο με την έξοδο του συστήματος.

β) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων – μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς που βρήκατε στο ερώτημα α) (θα χρειαστείτε τις εξισώσεις tf & zplane του Matlab).

γ) Είναι το σύστημα αυτό ευσταθές; Γιατί;

δ) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος (συνάρτηση freqz της Matlab) στο διάστημα [-π π] με βήμα π/128. Τι θα συμβεί εάν δεν δώσετε το διάστημα απεικόνισης ως 3ο όρισμα στη συνάρτηση freqz;

Πως συνδέεται η παρατήρηση των διαγραμμάτων πλάτους και φάσης της απόκρισης συχνότητας με τα μηδενικά και τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς;

ε) Σχεδιάστε ξανά την απόκριση συχνότητας του συστήματος στο οποίο, αυτή τη φορά, θα έχετε 'προσθέσει' έναν επιπλέον πόλο στο z=1.

Τι αλλαγές επιφέρει η ύπαρξη του συγκεκριμένου πόλου στα διαγράμματα της απόκρισης συχνότητας κι επομένως και στο σύστημα και γιατί;

<u>ΆΣΚΗΣΗ 2η</u>

α) Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z)=\frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} \quad \text{με} \quad |z|>2$$

Βρείτε, με χρήση του Matlab, την αναλυτική έκφραση που προκύπτει από την **ανάλυση σε απλά κλάσματα** της H(z). Θα χρειαστείτε τις συναρτήσεις:

residuez (εύρεση πόλων/συντελεστών απλών κλασμάτων), ***syms*** (ορισμός z), ***pretty*** (για να τυπώσετε την H(z) στο command window του Matlab).

β) Ποιος είναι ο **αντίστροφος μετασχηματισμός z** της παραπάνω H(z); Υπολογίστε τον θεωρητικά στην αναφορά σας, χρησιμοποιώντας τα απλά κλάσματα που σας έδωσε το script σας στο ερώτημα α) και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα με τη συνάρτηση ***iztrans*** του Matlab.

<u>Κατά την εξέταση της παρούσας εργαστηριακής άσκησης</u>, θα ερωτηθείτε τόσο για τον κώδικά σας όσο και σχετικά με τις θεωρητικές γνώσεις που χρειάστηκε να έχετε ώστε να υλοποιήσετε το εργαστήριο (κώδικα & αναφορά) και να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα που πήρατε.

<u>Κατά την υποβολή</u> της παρούσας εργαστηριακής άσκησης παραδίδεται **<u>κώδικα</u>** και **<u>αναφορά</u>**, η οποία (αναφορά) να περιέχει:

- Σύντομη περιγραφή της υλοποίησης σε κάθε ερώτημα, συμπεράσματα και παρατηρήσεις όπου προκύπτουν (σημαντικό!).
- Οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν σε κάθε ερώτημα.
- Τα γραφήματα να περιλαμβάνουν, απαραιτήτως, κεντρικό τίτλο και τίτλους στους άξονες, ενώ φροντίστε να παρουσιάζετε όλο το 'χρήσιμο' εύρος των σημάτων σας (όπου ζητείται γραφική παράσταση) ώστε να μπορούμε να εξάγουμε τις χρήσιμες πληροφορίες.
- Να ΜΗΝ περιέχει κώδικες.