

## Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

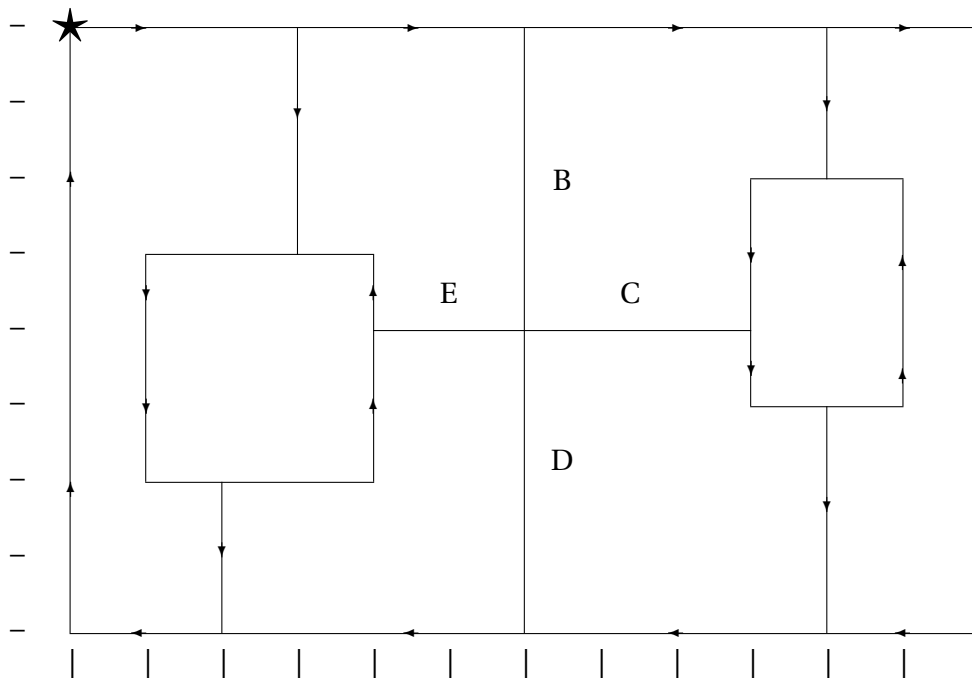
MIEI - UMinho

Trabalho 2 (data de entrega: 27 de novembro)

Há situações em que se pretende determinar o circuito<sup>1</sup>, ou conjunto de circuitos, em que todos os arcos de um grafo são percorridos, pelo menos, uma vez, minimizando a distância total percorrida. Note-se que pode ser necessário atravessar o mesmo arco mais de uma vez.

Isso ocorre, por exemplo, quando um veículo de recolha de lixo tem de percorrer ruas que têm todas um único sentido, para recolher os sacos existentes ao longo da rua, ou quando há um sistema automático de recolha de contentores, todos localizados no mesmo lado da rua, cuja recolha obriga a percorrer a rua num determinado sentido. Há variantes deste problema em que as ruas podem ter dois sentidos ou ainda em que as ruas são mistas, umas com um único sentido e outras com dois sentidos.

Considere o mapa de uma zona de uma cidade, apresentado na Figura:



O veículo parte do depósito localizado no ponto assinalado com um estrela e regressa ao mesmo ponto. Considere que as ruas têm um comprimento inteiro, proporcional à dimensão do seu traço em centímetros. Todas as ruas têm apenas um sentido, indicado pelas setas. Para além destas ruas, deve atribuir um sentido às ruas BCDE de acordo com as regras enunciadas em baixo.

<sup>1</sup>percurso em que o vértice de início coincide com o vértice de fim e os arcos do grafo são atravessados no sentido directo.

Este problema pode não ter solução. Para tal, basta, por exemplo, haver um vértice em que só haja arcos a entrar. Pode mostrar-se que existe uma solução se e só se o grafo for *fortemente ligado*, ou seja, se existir um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice do grafo. Daí a regra de escolha de sentido das ruas abaixo enunciada.

### Determinação do sentido das ruas BCDE

Seja ABCDE o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição. O sentido da rua é:

- a descer, se B par; a subir, caso contrário;
- para a direita, se C par; para a esquerda, caso contrário;
- a descer, se D par; a subir, caso contrário;
- para a direita, se E par; para a esquerda, caso contrário; caso esta escolha do sentido de E torne o problema impossível, E deve ter o sentido contrário.

### PARTE I

1. Indique o valor de ABCDE e apresente a rede com indicação dos sentidos das ruas BDCE.
2. O problema pode ser formulado como um problema de transporte numa rede geral  $G = (V, A)$  considerando variáveis de decisão  $x_{ij}$  que representam o fluxo no arco  $(i, j)$ ,  $\forall (i, j) \in A$ , i.e., o número de vezes que o arco  $(i, j)$  é percorrido. O modelo de minimização de custo de transporte em rede tem as seguintes restrições:
  - o fluxo que entra num vértice do grafo deve ser igual ao que sai, para o percurso ser fechado.
  - o fluxo em qualquer arco deve ser, pelo menos, uma unidade, para visitar todos os arcos.
3. No segundo grupo de restrições, é imposto um limite inferior ao valor das variáveis. O *software* de resolução de problemas de transportes em rede normalmente apenas aceita arcos com limite superior. Usando a mudança de variável  $y_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in A$ , em que  $l_{ij}$  é o limite inferior de fluxo no arco  $(i, j)$ , pode obter-se uma nova instância em que os limites inferiores são todos iguais a zero. Apresente o modelo de programação linear da nova instância.
4. Apresente a rede do problema de transporte que resulta da mudança de variável, indicando claramente quais são os valores de oferta (para os vértices de excesso) e de procura (para os vértices de defeito) associados a cada vértice do grafo.
5. Apresente o ficheiro de input submetido ao *software* de optimização em rede (por exemplo, o Relax4) (*cut-and-paste*).

6. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
7. Interprete a solução ótima, apresente o percurso correspondente, e calcule o seu custo. Caso tenha obtido a mesma solução ótima do Trabalho 1, pode fazer *cut-and-paste* do relatório anterior. Caso contrário, teça todas as considerações que considere necessárias.
8. Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.
9. Faça *upload* do ficheiro relax no BlackBoard.

## PARTE II

Existe uma outra formulação para este problema que revela a estrutura da solução ótima. Consiste em considerar variáveis de decisão  $x_{ij}$ , cada uma correspondendo a um caminho entre um vértice de excesso  $i$  e um vértice de defeito  $j$ , como se explica de seguida.

Quando, num cruzamento, o número de ruas que entram é maior do que o número de ruas que saem (vértice de excesso), torna-se necessário repetir, pelo menos, uma das ruas de saída. O mesmo se passa quando o número de ruas que entram é menor do que o número de ruas que saem (vértice de defeito): torna-se necessário repetir, pelo menos, uma das ruas de entrada. Estes arcos repetidos devem fazer parte de caminhos adicionais que saem dos vértices de excesso e chegam aos vértices de defeito, dando origem a percursos válidos. O modelo de minimização consiste em determinar os caminhos adicionais a realizar de modo a minimizar a soma dos seus custos.

1. Apresente o grafo bipartido deste problema de transporte, indicando os valores das ofertas e das procura associados aos vértices e os custos unitários de transporte (calculados na alínea seguinte). Verifique que o problema é balanceado, *i.e.*, o número total de caminhos que saem dos vértices de excesso é igual ao número de caminhos que chegam aos vértices de defeito. Dê uma justificação sucinta para esse facto.
2. Por inspecção, ou usando um programa adequado, determine os caminhos mais curtos entre os vértices relevantes. Apresente uma matriz com os valores dos caminhos mais curtos para cada par vértice de excesso / defeito.
3. Apresente o ficheiro de input submetido ao *software* de optimização em rede (por exemplo, o Relax4) (*cut-and-paste*).
4. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
5. Interprete a solução ótima, apresente o percurso correspondente, e calcule o seu custo (faça isto caso apenas no caso de obter uma solução ótima alternativa).
6. Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.
7. Faça *upload* do ficheiro relax no BlackBoard.

## **ANEXO**

### **Objectivo**

Os trabalhos práticos experimentais visam desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos, de criar modelos para os descrever, de obter soluções para esses modelos utilizando programas computacionais adequados, de validar os modelos obtidos, de interpretar as soluções obtidas, e de elaborar recomendações para o sistema em análise.

### **Classificação dos trabalhos**

O aspecto que é mais valorizado é a correcção e a apresentação dos modelos. A apresentação dos modelos deve incluir a identificação das variáveis de decisão e dos parâmetros (dados) e a explicitação da função objectivo e das restrições, mas deverá ser acompanhada de explicações detalhadas e de justificações. Por exemplo, a escolha das variáveis de decisão deve ser justificada, mostrando como é que elas representam as decisões a tomar no sistema real. As restrições (ou os grupos de restrições) devem ser também justificadas com detalhe, mostrando como é que traduzem as regras de funcionamento do sistema e como é que representam as decisões admissíveis. Deve também ser mostrado que a função objectivo traduz uma medida de eficiência do sistema. A dimensão (por exemplo, artigos/mês, horas, etc.) em que estão expressos os vários elementos do modelo (variáveis de decisão, parâmetros, função objectivo, restrições) deve ser claramente indicada.

Outros aspectos que são também valorizados são os relacionados com a metodologia da Investigação Operacional. Por exemplo, o trabalho de validação do modelo, que deve necessariamente incluir uma verificação de que a solução obtida pelo solver é uma decisão admissível, e a tradução da solução do solver numa decisão adequada ao sistema real.

### **Formato do Relatório**

O relatório de cada trabalho experimental deve traduzir a experiência de modelação e resolução dos casos propostos e conter as peças requeridas no enunciado do trabalho.

Poderá incluir a discussão de dificuldades surgidas durante a realização do trabalho.

O relatório deve ser feito em folhas formato A4, ter uma folha de capa com a identificação dos alunos do grupo, do trabalho e da data, devendo o conjunto ser agrafado no canto superior esquerdo.

Não é desejável que o aluno perca muito tempo com a qualidade de "apresentação gráfica", que não é valorizada. O relatório pode incluir texto editado com processador de texto e impresso, texto manuscrito legível, desenhos feitos em computador e desenhos feitos manualmente. É aceitável haver páginas que combinem elementos de todos estes tipos. No caso de haver páginas que tenham uma matriz comum (template), o original com a matriz pode ser fotocopiado, e depois manuscrito.

### **Grupos de Trabalho**

Os trabalhos experimentais devem ser realizados em grupos de 3 ou 4 alunos, excepcionalmente 5. A inscrição nos grupos é feita pelos alunos no BlackBoard > Grupos.

## **Entrega dos Relatórios dos Trabalhos**

A entrega dos relatórios dos trabalhos deverá ser feita:

- alunos de MIEI: no cacifo de correio de Valério de Carvalho (DPS, Braga, 1º piso; após subir as escadas, virar à direita para um corredor estreito, e novamente à direita).
- alunos de MIEGSI: na Secretaria do Departamento de Produção e Sistemas (DPS, Guimarães).

Estudantes com estatuto de trabalhador-estudante que não possam deslocar-se à UMinho poderão fazer o envio para [vc@dps.uminho.pt](mailto:vc@dps.uminho.pt)

## **Outras Informações**

Os trabalhos em que haja uma conduta académica imprópria serão anulados, de acordo com o definido no Art. 108.º do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM), e proceder-se-á conforme está definido nesse artigo. A classificação final dos alunos envolvidos nessas situações será "não admitido", pelo que deverão voltar a frequentar a disciplina no ano seguinte.

## **Dispensa de realização de Trabalhos Práticos Experimentais**

### **1. Alunos com estatuto de aluno ordinário**

A classificação obtida nos trabalhos num ano lectivo anterior não dispensa um aluno reprovado da realização dos trabalhos no ano lectivo corrente.

### **2. Alunos com estatuto de trabalhador-estudante**

Segundo está determinado no Artigo 33.º - Regime de frequência - do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM):

4. O trabalhador estudante que obtenha aproveitamento na componente de natureza experimental ou componente de trabalho prático num dado ano letivo e sem aproveitamento na respetiva UC fica dispensado de efetuar essa componente no ano letivo seguinte.

Assim, no corrente ano, essa dispensa não é válida para os alunos trabalhadores estudantes que realizaram os trabalhos há dois ou mais anos.

A verificação do estatuto do aluno é feita à data de emissão das classificações, no final do semestre.