VORONOI图及其应用

00748016 田野

Road Map

- Voronoi图
  - Voronoi图的概念及其对偶图
  - 由结构引出的重要性质及结论
  - 构造Voronoi图的算法
- Voronoi图的应用
  - 最近邻近
  - 最大空圆

概念

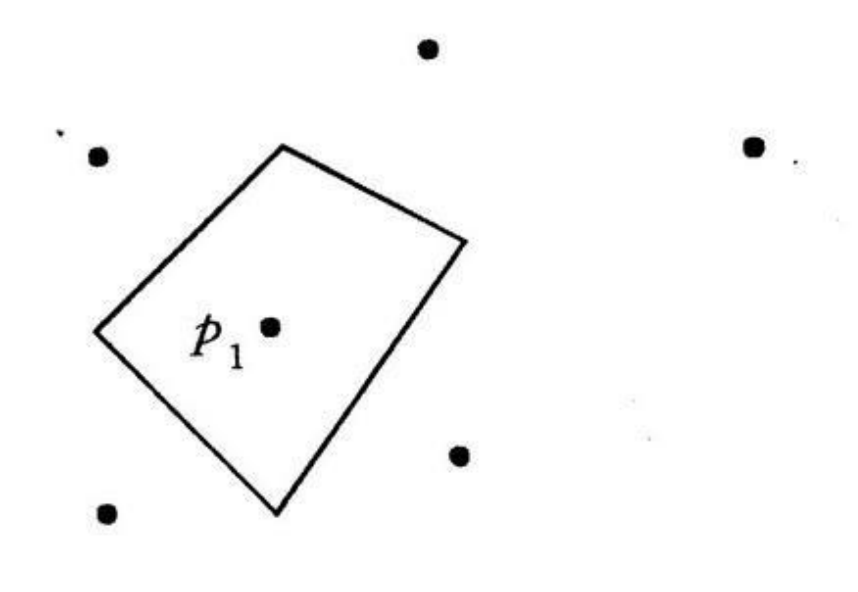
- Voronoi图以凸壳结构为基础，是计算几何学中一种重要的几何结构，有着广泛的应用。
- 问题引入：在一大片林区中设置n个火情观察站$p_1, p_2, \ldots, p_n$，每个观察站负责其附近林区V(pi)的火情发现及灭火任务。$V(p_i)$由距p_i比距其他p_j（$j = 1, \ldots, n, j \neq i$）更近的树组成，$V(p_i)$就是关联于$(p_i)$的一个Voronoi多边形，而Voronoi图由所有$V(p_i)$组成（$i = 1, \ldots, n$）。

问题抽象

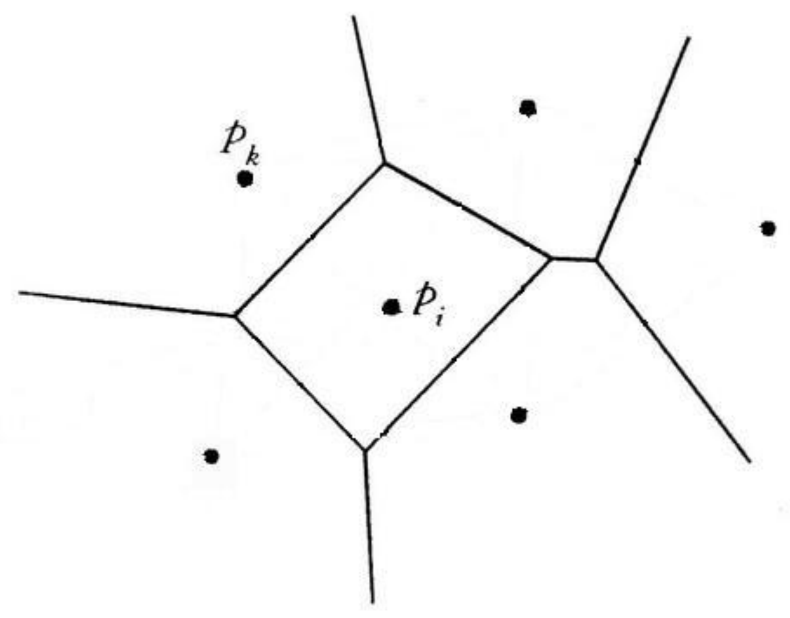
- 定义：设$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$为平面上n个点的点集，线段$p_ip_j$的中垂线把平面分成两部分，其中包含$p_i$点的那部分记作$H(p_i, p_j)$，包括$p_j$点的那部分记作$H(p_j, p_i)$。
- 定义 $V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j)$ 为p_i点关联的Voronoi多边形。
- 显然，关联于p_i的Voronoi多边形是一个不多于n-1条边的凸多边形区域。

问题抽象

- 对于S中每个点p_i都可做这样一个Voronoi多边形，这样n个多边形（有界或无界）组成的图称为Voronoi图，记作Vor(S)，图中的边和顶点称为Voronoi边和Voronoi点。如图。



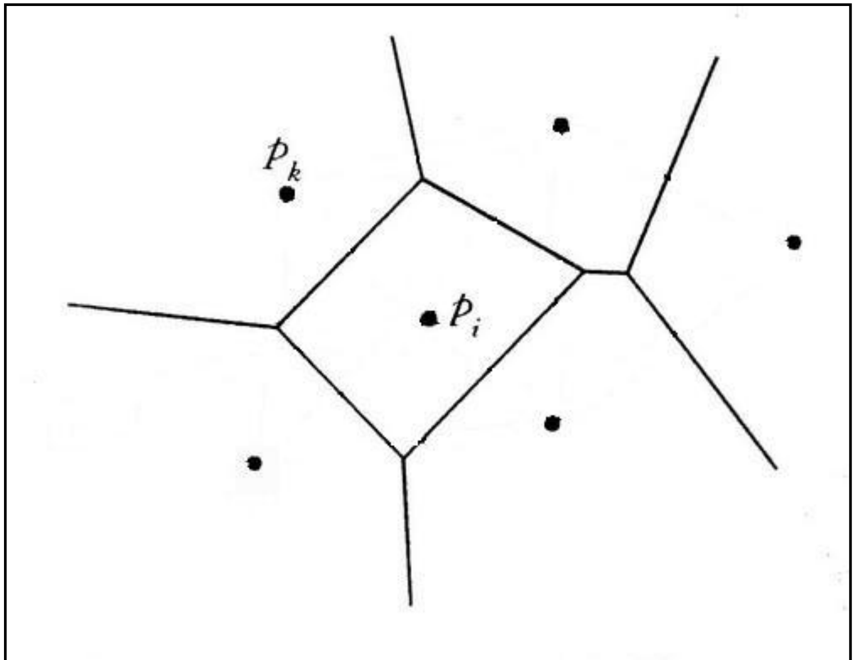
$n=6$ 时的一种 $V(p_1)$



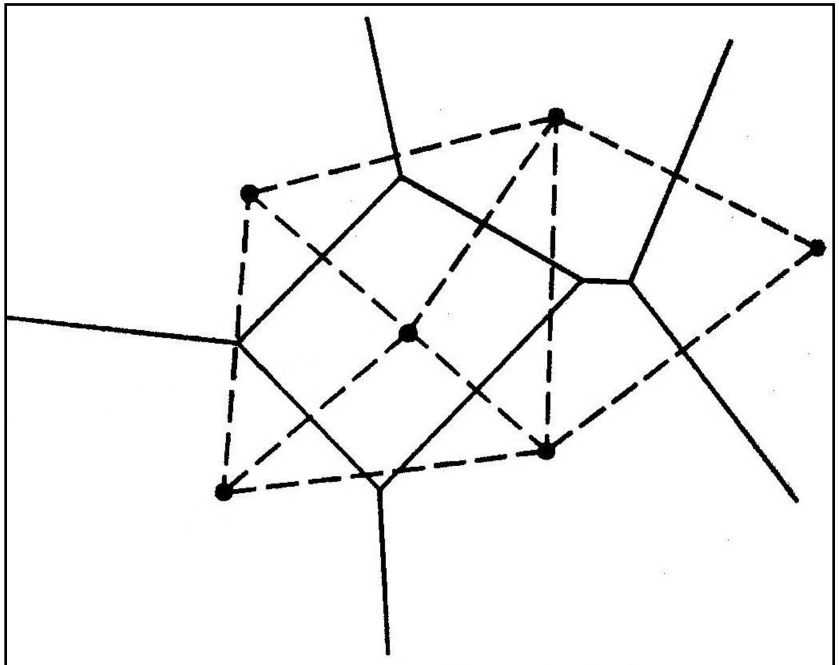
Voronoi 图

Voronoi图的对偶图

- Voronoi多边形的每条边都是S中某两点连线的中垂线，所有这样的点的连线构成一个图，恰好是Voronoi图的对偶图。对偶图顶点是S中的点，边被Voronoi边垂直平分。



Voronoi 图



Voronoi 图及其对偶图

重要性质及结论

- 定理1：V(p_i)是无界区域当且仅当p_i是S的凸壳边界上的点。
- 定理2：每个Voronoi点恰好是三条Voronoi边的交点。这表明每个Voronoi点是由S中三点形成的三角形的外接圆圆心。设这一圆心为v，则圆记作C(v)。
- 定理3：设v是Vor(S)的顶点，则圆C(v)中不含S的其他点。

构造Voronoi图的算法

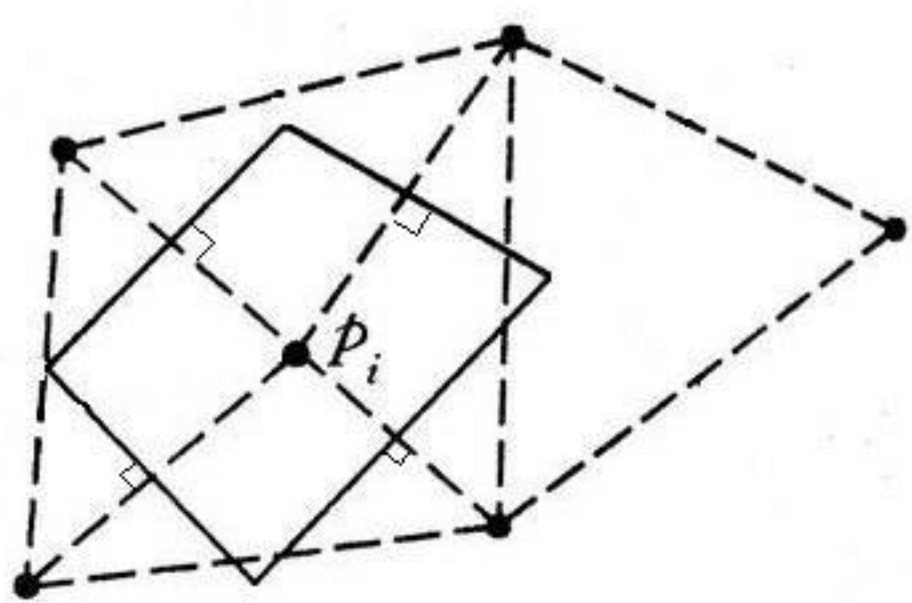
- 半平面的交
- 增量构造方法
- 分治法

Voronoi图构造算法：半平面的交

- 利用定义中的等式 $V(p_i)=\bigcap_{i\neq j} H(p_i,p_j)$

  构造n-1个半平面，求出交集，即得到点p_i的Voronoi多边形。

- 对每个p_i，执行以上步骤，得出S的Voronoi图。
- 该算法的时间复杂性为$O(n^2)$。

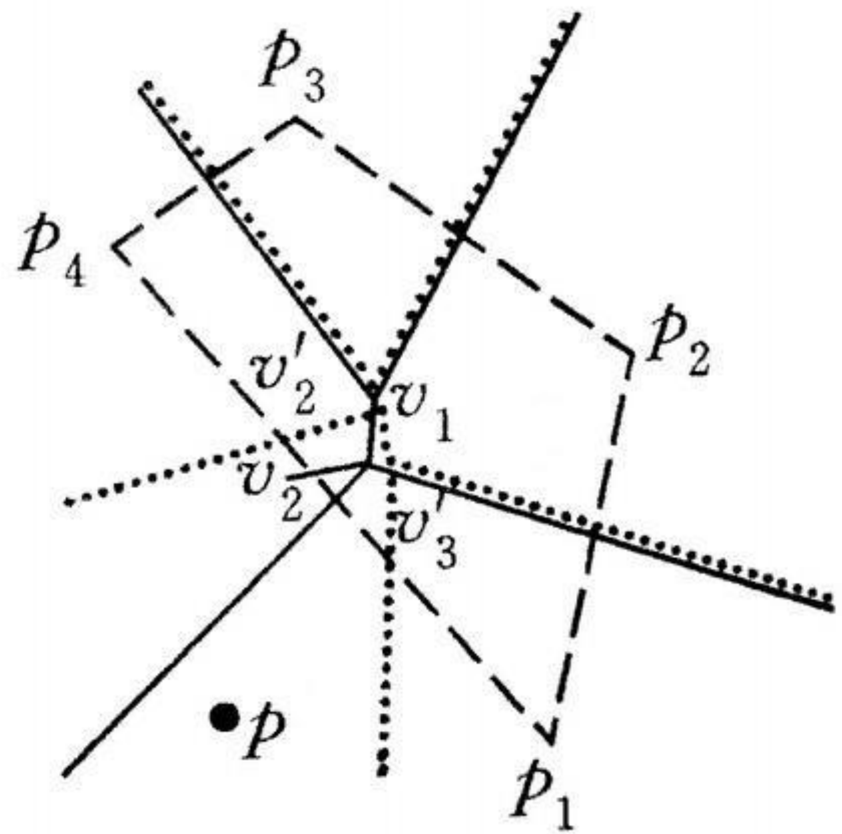


Voronoi图构造算法：增量构造法

- 思路：假设点集$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，已经构造出k (k<n)个点的Voronoi图，再增加点p_{k+1}后，要求构造出图$Vor(\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\})$。
- 1）若增加的点p在圆$C(v_i)$内且在凸壳之外，则首先确定p在凸壳哪条有向边的右侧，然后修改相应的Voronoi多边形和Voronoi点。
- 下图中，虚线表示凸壳，实线表示$Vor(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$。

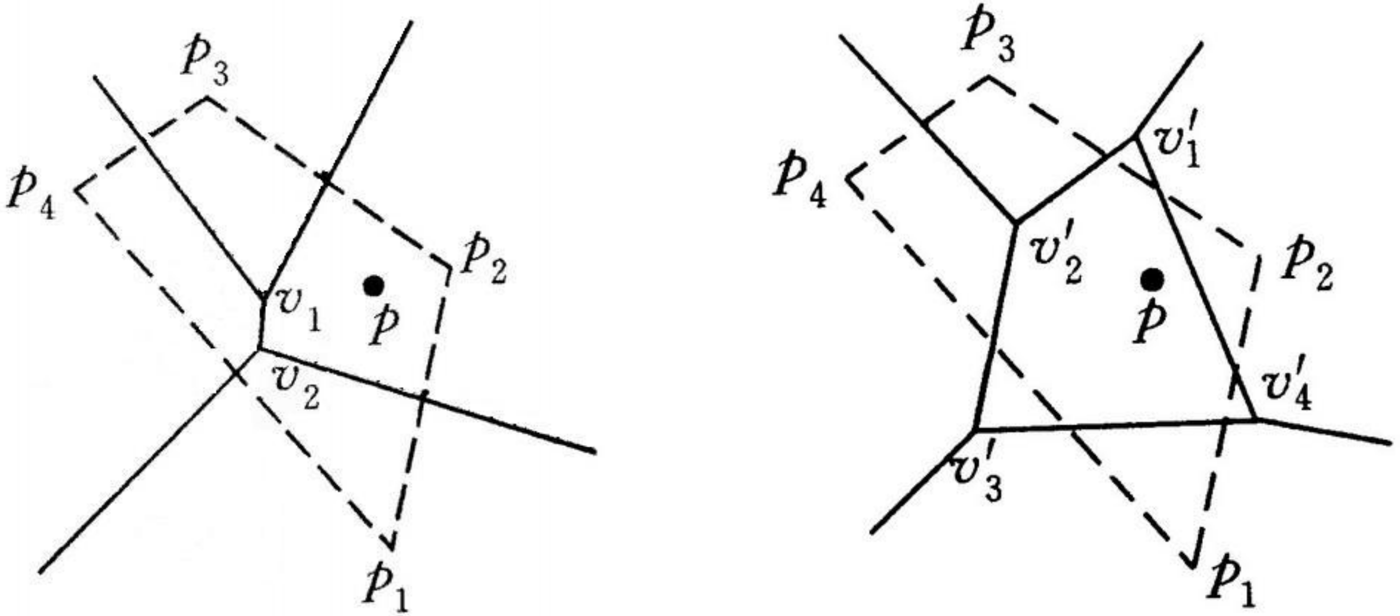
Voronoi图构造算法：增量构造法

- P点位于C(v_2)内但位于凸壳外，且位于有向边(p_4, p_1)右侧。修改与p_4, p_1, p相关的Voronoi多边形及Voronoi点，得到Vor({p_1, p_2, p_3, p_4, p})如点线所示。
- 新图有三个Voronoi点：v_1, v_2', v_3'。



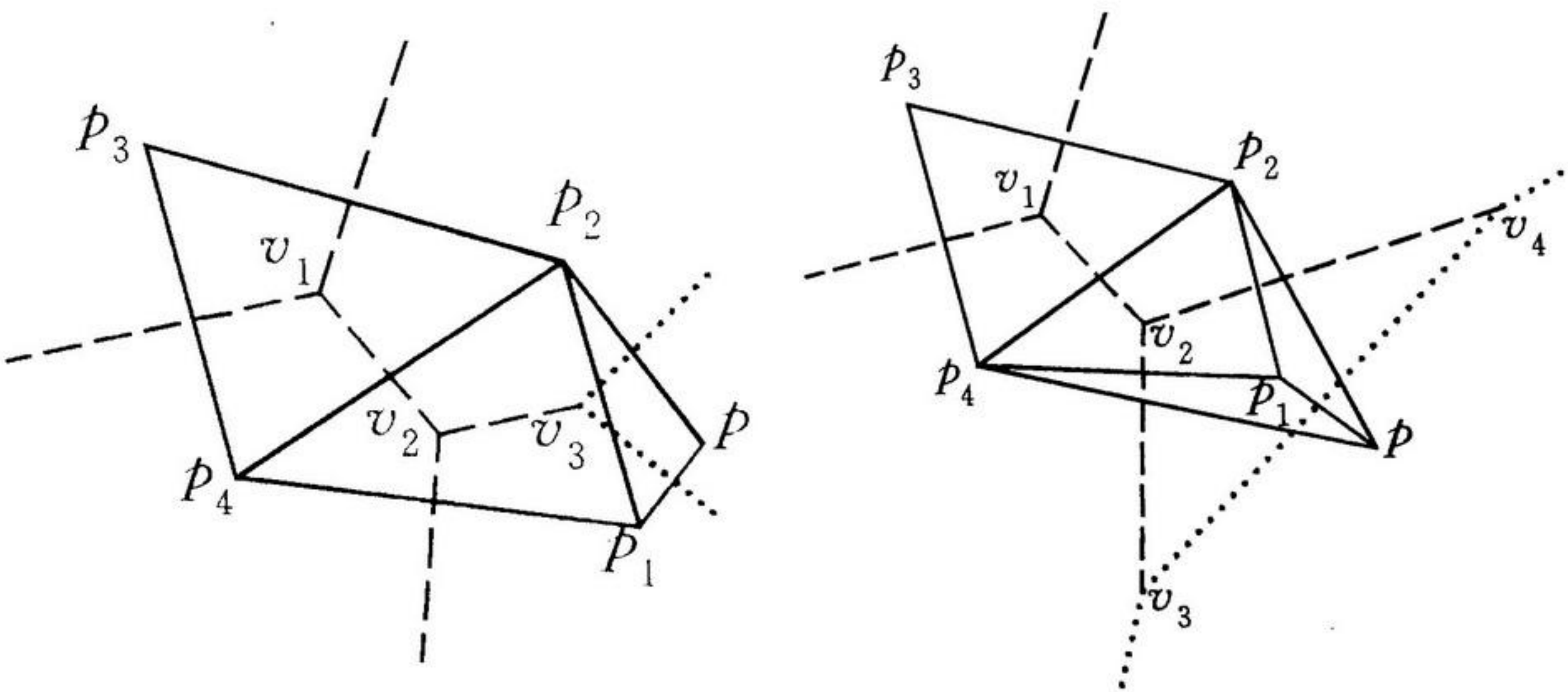
Voronoi图构造算法：增量构造法

- 2）若新增的点p位于凸壳内，则先确定p所在的多边形区域，然后修改该多边形的边与顶点。如图，原多边形V(p2)的顶点v1, v2被修改，新增顶点v1’, v2’, v3’, v4’。



Voronoi图构造算法：增量构造法

- 3）若新增顶点p位于凸壳外且在任意圆C(v_i)外，则首先确定p是在一条有向边右侧还是两条有向边右侧，再根据情况修改p所在多边形的边界。



Voronoi图构造算法：增量构造法

- 综上所述，得到以下算法：
- 输入：点集$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$。
- 1. 任取p_i, p_j, p_k三点连成三角形
- 2. 求出此三角形的外心v和半径d
- 3. 对图中点计算距离$d(p_r, v)$，$r=1\ldots n$并据此将各点排序，得到$p_1, p_2, \ldots, p_{n-3}$。$l \leftarrow 1$。
- 4. if $d(p_l, v)>d$ then goto 6
- 5. 改取p_l, p_i, p_j组成三角形。若有多点满足$d(p_l, v)<d$，则取p_1, p_2, p_3连成三角形。goto 2

Voronoi图构造算法：增量构造法

- 6. 判定p_l在已有哪条有向边或哪两条有向边右侧
- 7. 修改p_l所在多边形的边界及顶点
- 8. $l \leftarrow l+1$，goto 6 直到$l>n-3$
- 步骤1，2，4，5，7时间为常数；步骤3要求n-3次计算距离及nlogn次比较；步骤5到步骤2的循环为常数次，步骤6需要O(n)次计算，步骤8循环n-3次，代价$3+4+\ldots+n-1 = O(n^2)$，总时间复杂性为$O(n^2)$。

Voronoi图构造算法：分治法

- 基本思想：按所有点的x坐标排序，取中值，将点集分割为S_1, S_2，使$|S_1|=|S_2|=1/2|S|$。如果S_1, S_2含点的数目多于4，则继续分割，直至子点集规模小于等于4，对每个子点集使用半平面的交或增量构造法求出Voronoi图，再不断合并相邻子点集的Voronoi图，得到Vor(S)。

Voronoi图构造算法：分治法

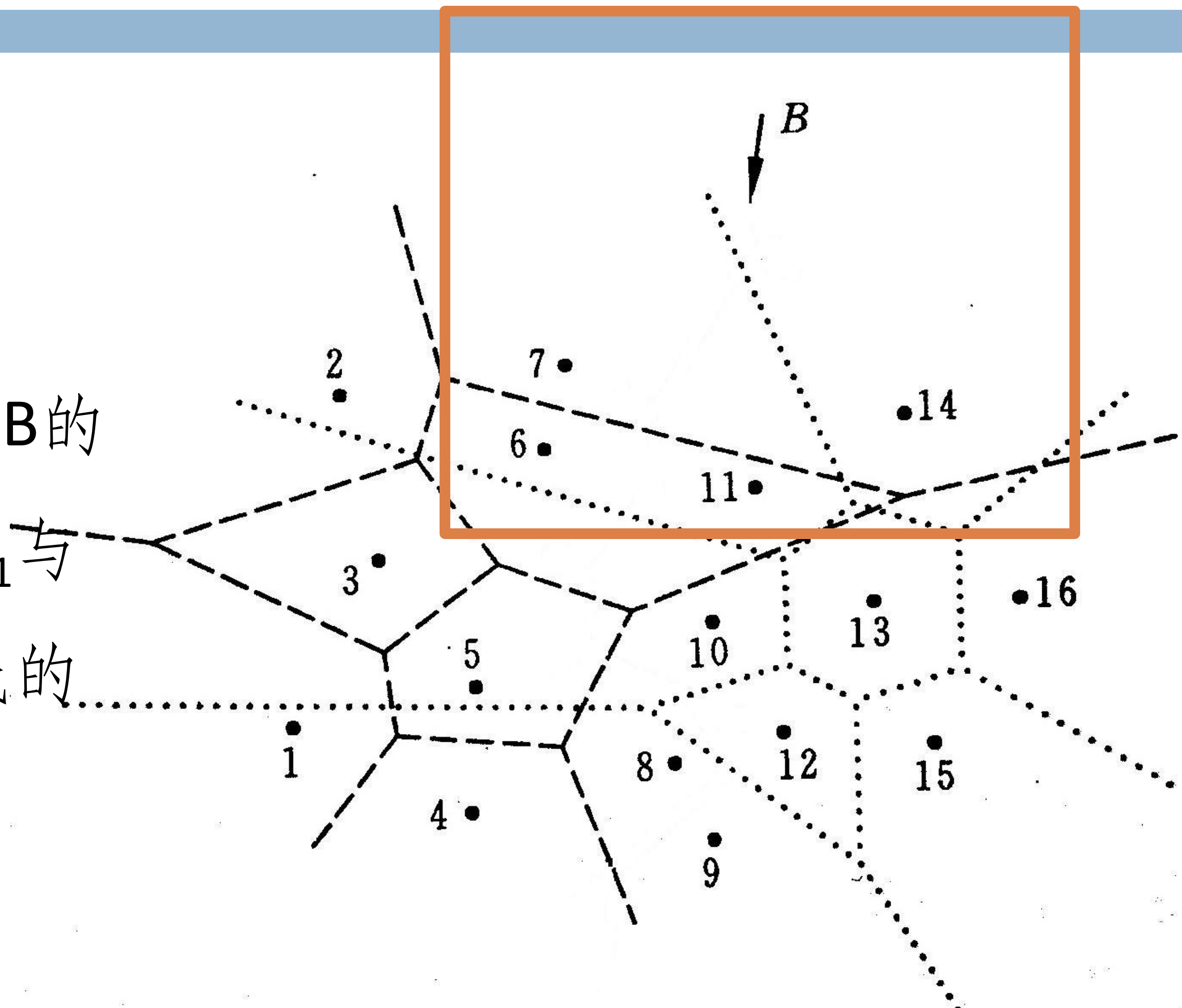
- 算法描述：
- 1. 划分S为规模近似相等的子集S_1, S_2
- 2. 递归地构造Vor (S_1)和Vor(S_2)
- 3. 构造折线B分开S_1, S_2，使得对B上任一点v及S_1中的点a和S_2中的点b，有d(a, v)=d(b, v)。
- 4. 删去B左侧的Vor(S_2)的所有边和位于B右侧的Vor (S_1)的所有边，得到Vor(S)。

Voronoi图构造算法：分治法

- 如图，排序后

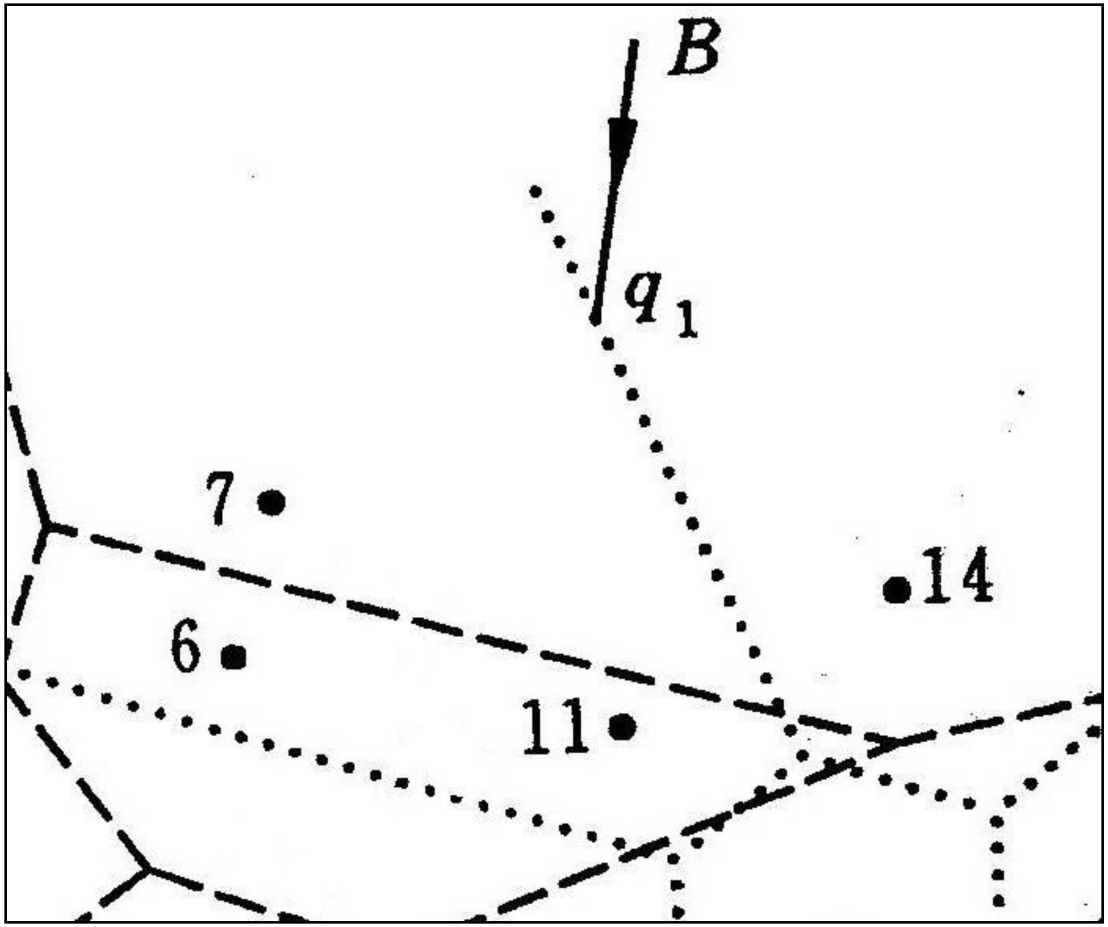
  $S_1=\{p_1, \ldots, p_8\}$,

  $S_2=\{p_9, \ldots, p_{16}\}$。B的每条线段都是$S_1$与$S_2$中某两点连线的中垂线。



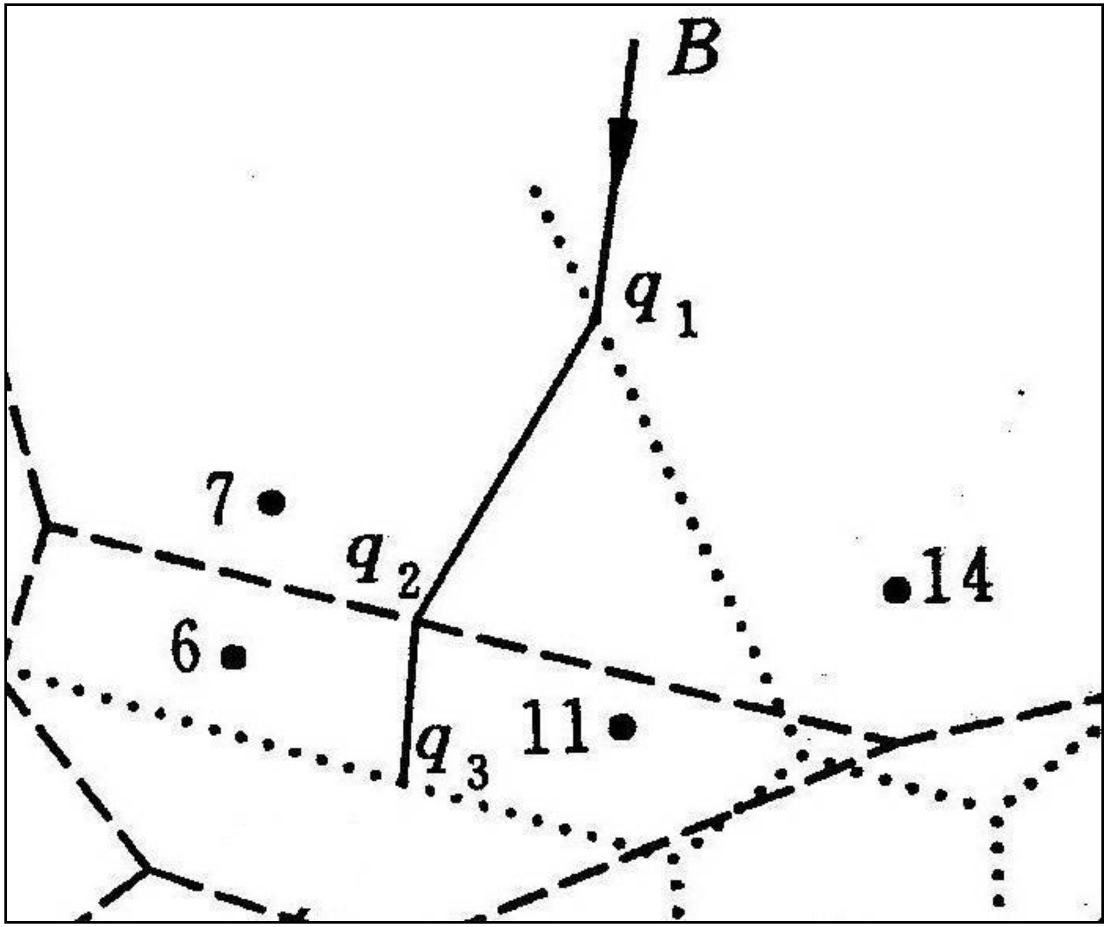
Voronoi图构造算法：分治法

- 图中点p_7, p_{14}分别属于S_1, S_2，它们连线的中垂线首先和Vor(S_2)中的边相交（即$p_{11}p_{14}$的中垂线），由此得到B的第一段。q_1即为$p_{11}p_{14}$和$p_{14}p_7$的交点，即三角形$p_{14}p_{11}p_7$的外心。



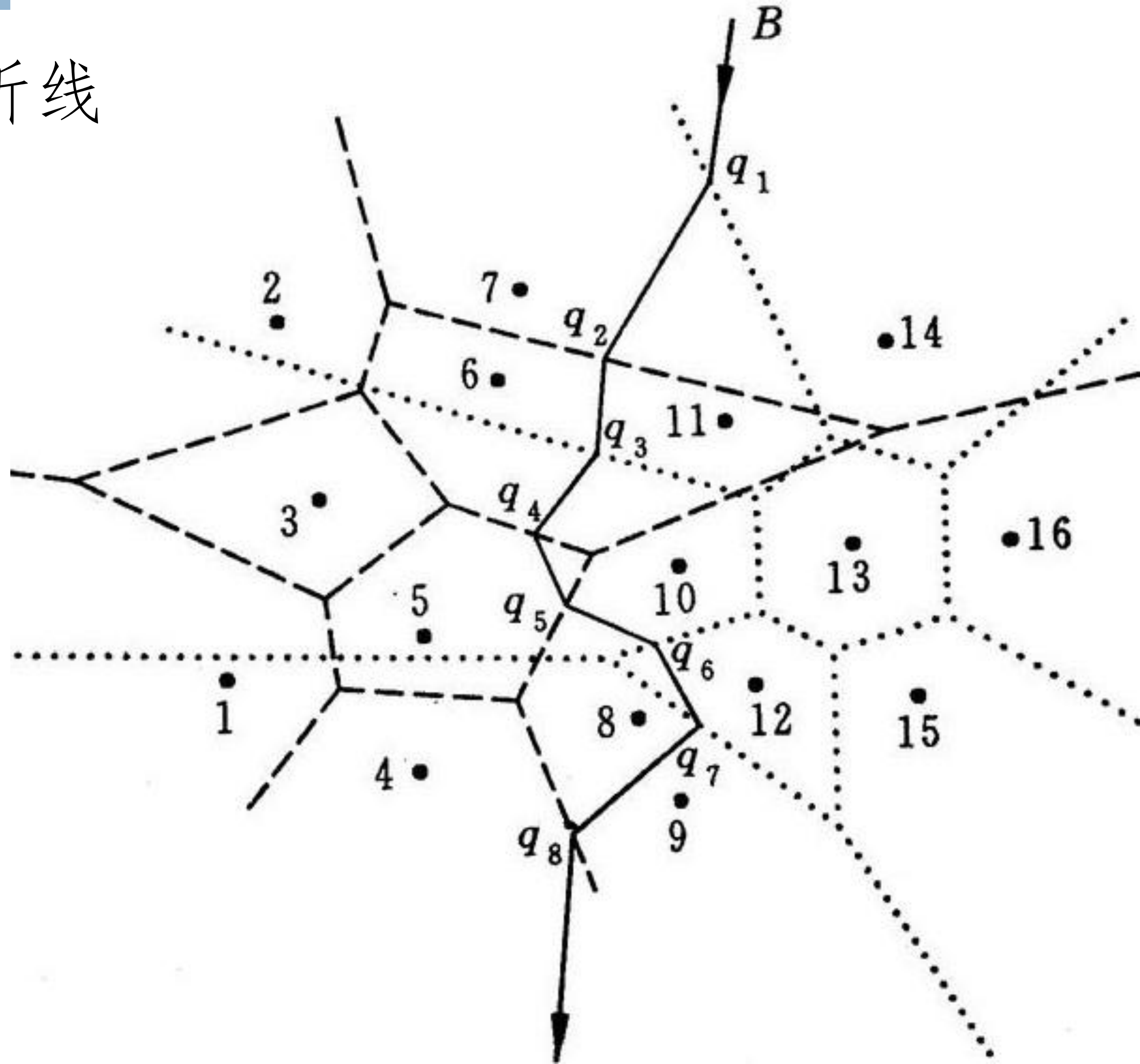
Voronoi图构造算法：分治法

- 所以折线B的下一段是p_7p_{11}的中垂线，由图可见它与p_7p_6的中垂线相交，交点为q_2，q_2q_3是$p_{11}p_6$中垂线上的一条线段，然后再寻找$p_{11}p_6$的中垂线与$V(p_{11})$的哪条线相交，以此类推。



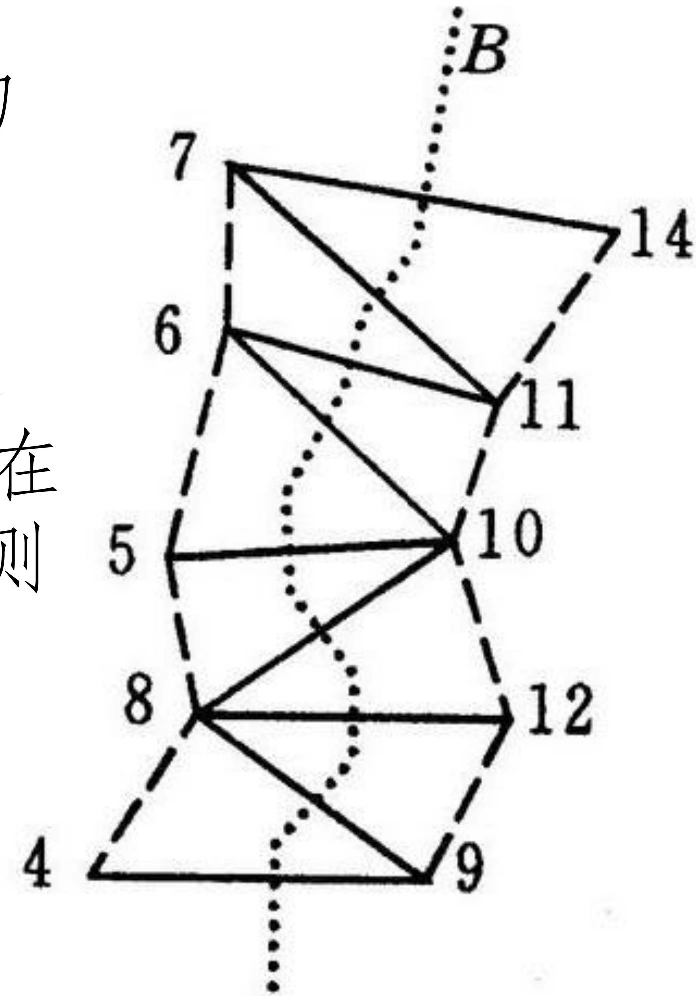
Voronoi图构造算法：分治法

- 最终得到整个S的折线B。



Voronoi图构造算法：分治法

- 总之，该过程可看作三角形序列的演变过程，即$p_{14}p_7p_1$-> $p_7p_{11}p_6$-> $p_{11}p_6p_{10}$-> $p_6p_{10}p_5$-> $p_5p_{10}p_8$-> $p_{10}p_8p_{12}$-> $p_{12}p_8p_9$-> $p_8p_9p_4$，称为三角形顶点转移法。折线B的构造可在O(n)内完成。设T(n)表示总时间，则T(n)=2T(n/2)+O(n)，解为T(n)=O(nlogn)。



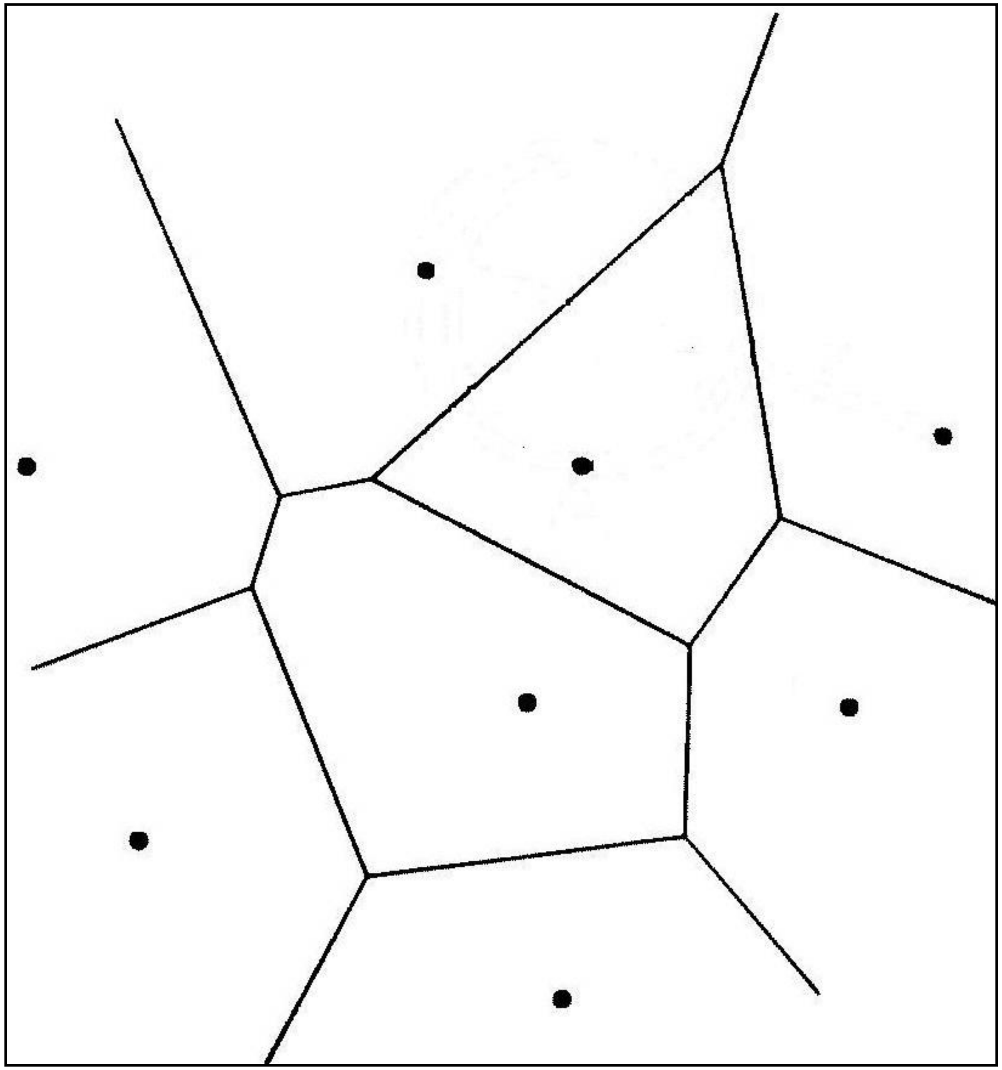
构造折线 B 的过程

Voronoi图的应用：最近邻近

- 问题描述：给定点集$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$及点q，在S中寻找离q最近的点。或给定点q属于S，在平面上寻找距离q最近的点。
- 对于给定的S，在O(nlogn)时间内构造相应的Voronoi图，于是寻找q的最近邻近问题转化为寻找q点落入哪个Voronoi域的问题。
- 如果q属于S，则与点q关联的Voronoi多边形V(q)中的点就是所求的q的最近邻近。这样可以避免将q与平面上所有点比较。

Voronoi图的应用：最大空圆

- 问题描述：给定平面上n个点的点集S，寻找一个不包含S中点的最大圆，并且该远的圆心在点集S的凸壳内部。

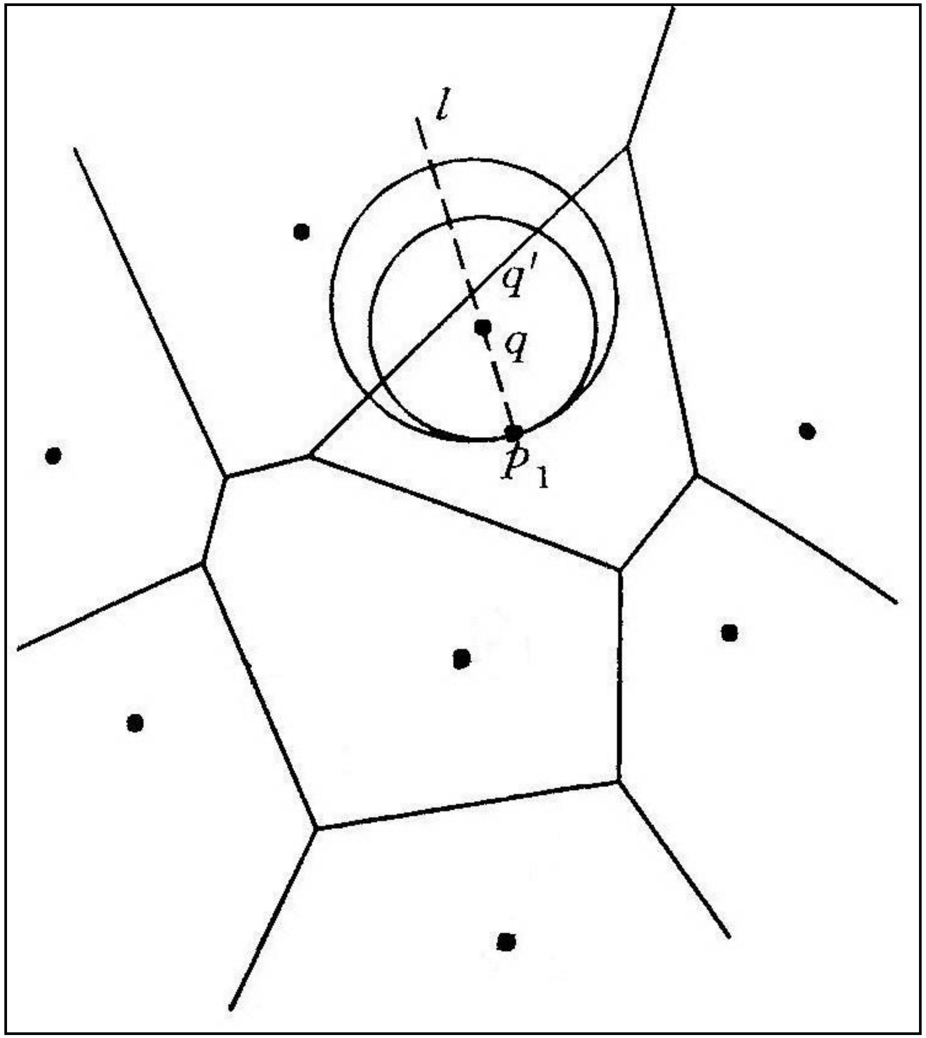


Voronoi图的应用：最大空圆

- 定理1：如果最大圆的圆心q在S的凸壳内部，那么q必然与Voronoi点重合。
- 证明：首先在S凸壳内部任选一点q，以q为圆心，f(q)为半径作圆，该圆内不包含S中点。然后不断扩充该圆使其碰到S中某点p_1。由p_1出发作过q的射线l，让q在l上移动到q’，显然f(q’)>f(q)。当q’在S凸壳边界上时，f(q’)实现局部最大。

Voronoi图的应用：最大空圆

- 定理1：如果最大圆的圆心q在S的凸壳内部，那么q必然与Voronoi点重合。
- 如图。

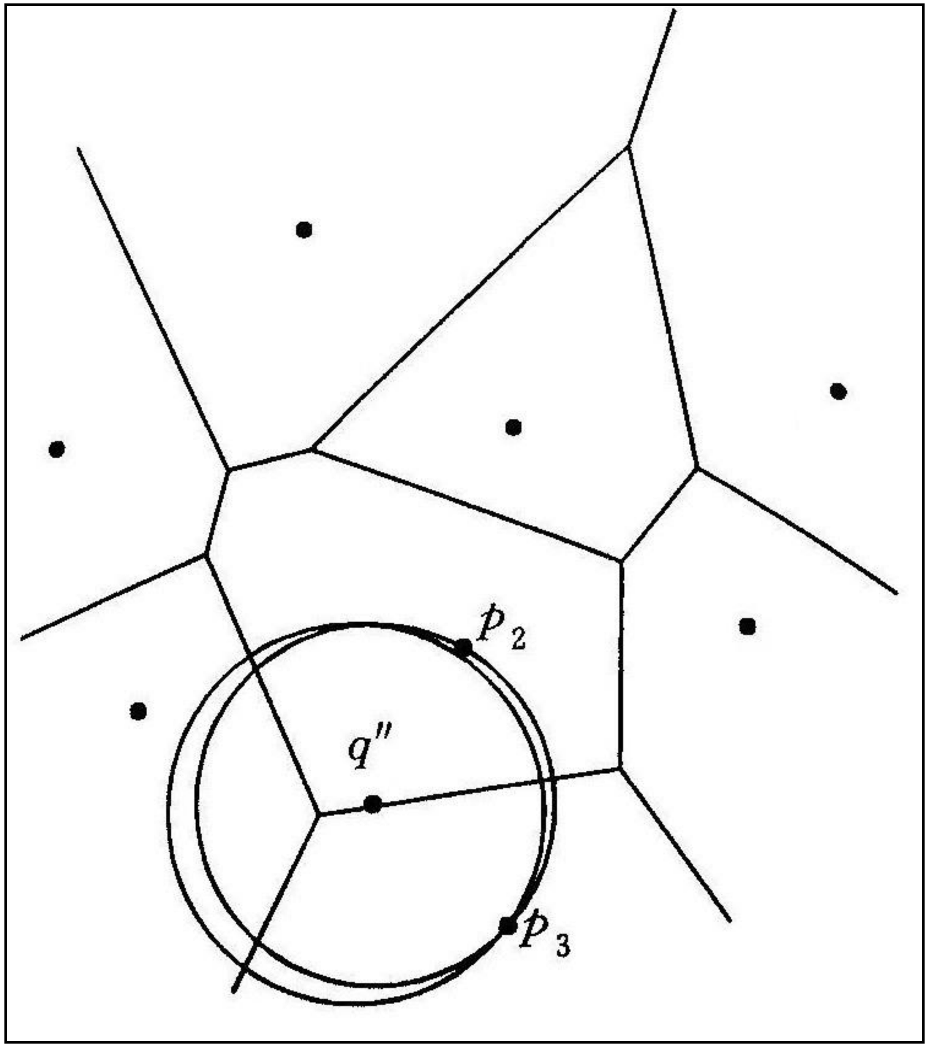


Voronoi图的应用：最大空圆

- 定理1证明（续）：假设现在的半径为f(q’’)时，该圆周已经通过两点p_2和p_3，但f(q’’)尚未达到局部最大值。如果沿p_2p_3的中垂线（即一条Voronoi边）移动q’’到p，那么f(p)>f(q’’)。只有当圆周通过S中三个点时，f(p)才能达到局部最大值，此时p必然是这三个点所形成的三角形的外心。

Voronoi图的应用：最大空圆

- 如图。

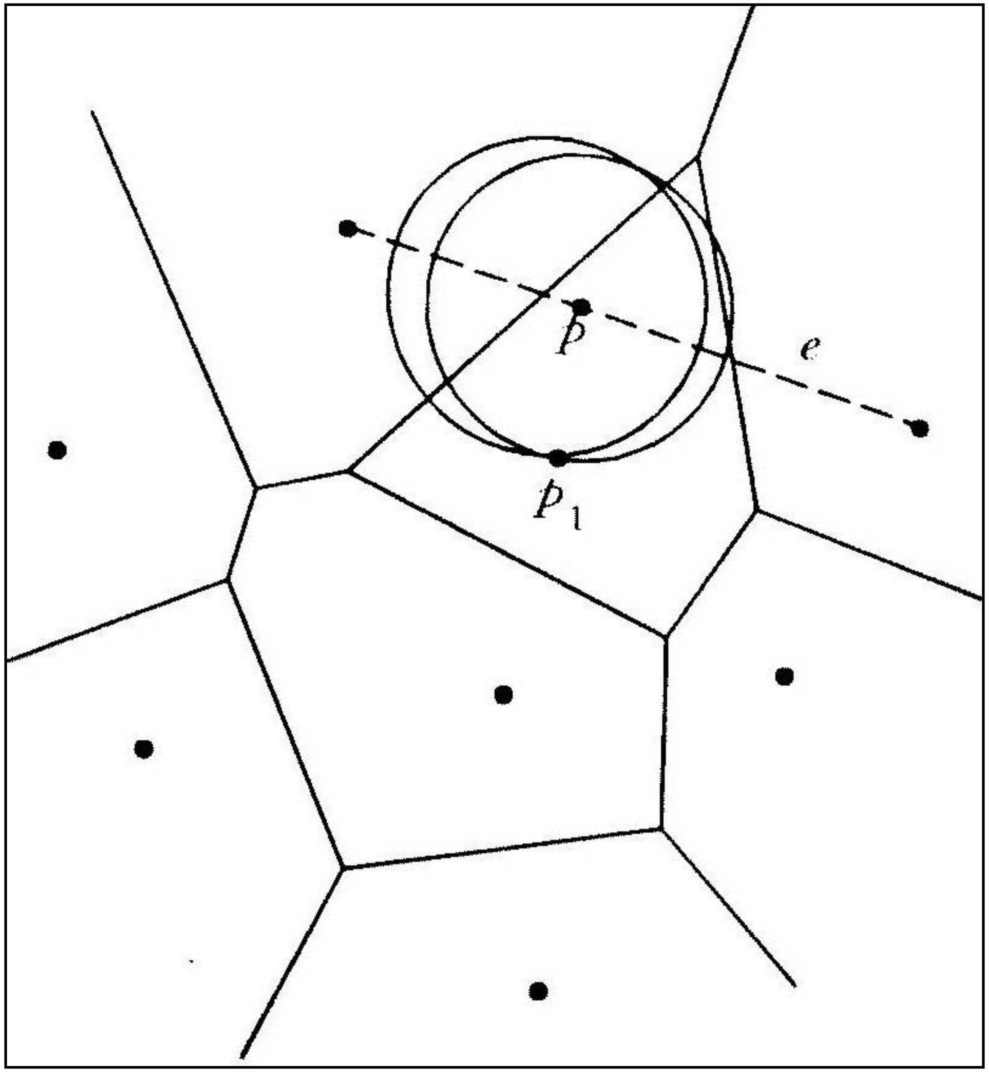


Voronoi图的应用：最大空圆

- 定理2：如果最大空圆的圆心p位于S凸壳边界上，则p一定位于一条Voronoi边上。
- 证明：假设圆心p在凸壳边界上，以f(p)为半径的圆不断扩充，直到圆周经过了S中一点p_1。假设p在S凸壳的边e上，则使点p沿e向不同方向移动，必然增加它与p_1的距离，直至圆p接触另一S中的点p_2，f(p)才是局部最大的。此时p必然位于p_1p_2的中垂线上，因此p位于S的一条Voronoi边上。

Voronoi图的应用：最大空圆

- 如图。



Voronoi图的应用：最大空圆

- 由定理1及定理2可知，Voronoi点是最大空圆圆心的候选点，但由于Voronoi点不一定在S凸壳的内部，所以只有在S凸壳内部的Voronoi点才是最大空圆圆心的候选点。

Voronoi图的应用：最大空圆

确定点集S的最大空圆的算法：

1. 计算S的Voronoi图Vor(S)
2. 计算S的凸壳。Max ← 0
3. for 每个Voronoi点v do

   if v在S凸壳内部

   then 计算以v为圆心的圆的半径并修改max
4. for 每条Voronoi边e do

   计算S凸壳边e’与e的交点p，计算以p为圆心的圆的半径并修改max
5. 返回max

Voronoi图的应用：最大空圆

- 第1步（求Voronoi图）与第二步（求S凸壳）均需要O(nlogn)的时间。由于Voronoi点的个数为n，S凸壳顶点个数为n，所以第3步判断每个Voronoi点是否在S凸壳内要耗费O(n)时间，判定n个点需要$O(n^2)$时间。第4步计算e与Voronoi边的交点需要时间$O(n^2)$，因此总的时间代价为$O(n^2)$。
- 采取某些改进方法，第3、4步可在O(nlogn)时间内完成，此处从略。

总结

- 本讲介绍了Voronoi图的概念及其对偶图、Voronoi图的性质、Voronoi图的三种构造方法以及两种典型应用。
- Voronoi图有悠久的历史和广泛的应用。

谢谢！

- 参考资料：
- 《计算几何》——算法设计与分析（第三版），周培德著，清华大学出版社，2008。