Universitat Politècnica de Catalunya

Computación y sistemas inteligentes

Bolas

Practica SamIam - Redes Bayesianas

Carlota Catot Bragós

Quatrimestre otoño 2019-2020

FIB UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH

Índice

1. Introducción

Para esta práctica se ha propuesto el siguiente problema: que pasará si lanzamos una pelota en un tablero (como el de la figura 1) de tamaño 6x9 donde en ciertas posiciones tiene cilindros, que probabilidades hay de que acabe en ciertas columnas, pase por ciertas posiciones...

En la primera parte de la práctica tendremos en cuenta que los cilindros son redondos i por tanto, si una bola impacta contra uno de los cilindros la probabilidad de que se vaya a derecha o izquierda será de 0.5. También durante la primer parte de la práctica supondremos que se lanza una única bola desde cualquiera de las columnas.

En la segunda parte de la práctica se tratará que pasa si en vez de lanzar una única bola desde cualquier posición, lanzamos varias bolas (de manera secuencial) desde diferentes posiciones de la matriz. En esta parte se supone que las bolas no interaccionan entre ellas i es por eso que estas se lanzarán de manera secuencial i no todas a la vez.

Por último en la tercera parte de la práctica se tratará que pasa si los cilindros tienen un sesgo, es decir, que pasa si las probabilidades de que vayan a derecha e izquierda sean de 0.5, sino que sean p hacia la derecha i 1-p hacia la izquierda.

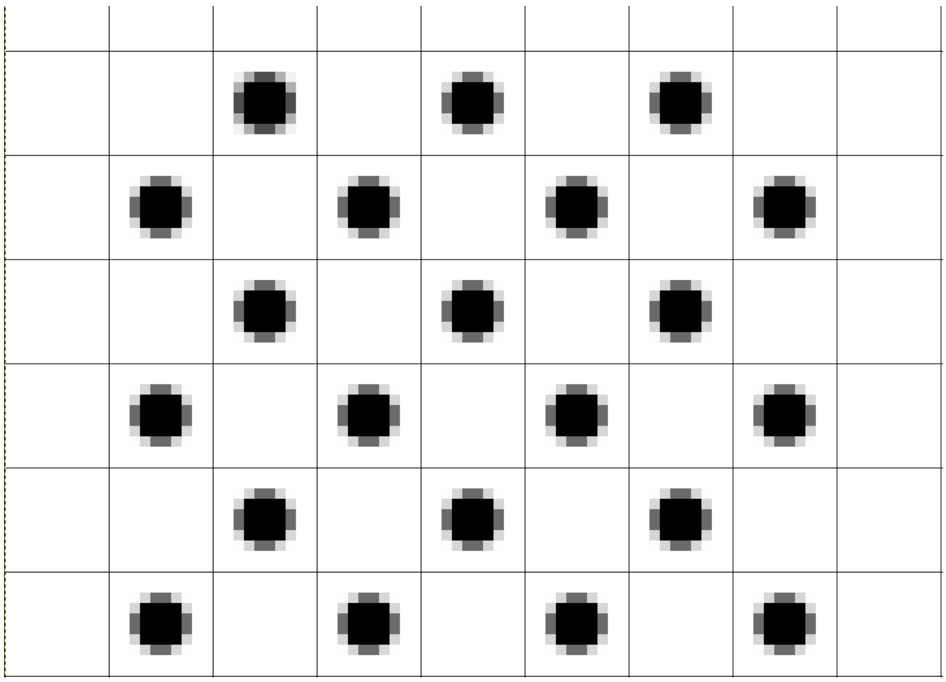

Figura 1: Ejemplo del tablero definido en el enunciado

Durante este documento se explicará y justificarán las redes bayesianas que se han definido para resolver las tres partes planteadas anteriormente.

2. Lanzamiento de una bola desde cualquier posición

Como se ha comentado en la introducción, en la primera parte de la práctica se diseña una red bayesiana para calcular las probabilidades de que una bola se lance desde cualquier columna de la figura 1, pase por posiciones específicas del tablero o llegue a una columna específica (estas preguntas son las que resolverán en el apartado 2.4 del documento).

La red bayesiana planteada se puede observar en la figura 2, y durante los siguientes apartados se dan más detalles de la misma y se justifica porqué se ha diseñado de esta manera.

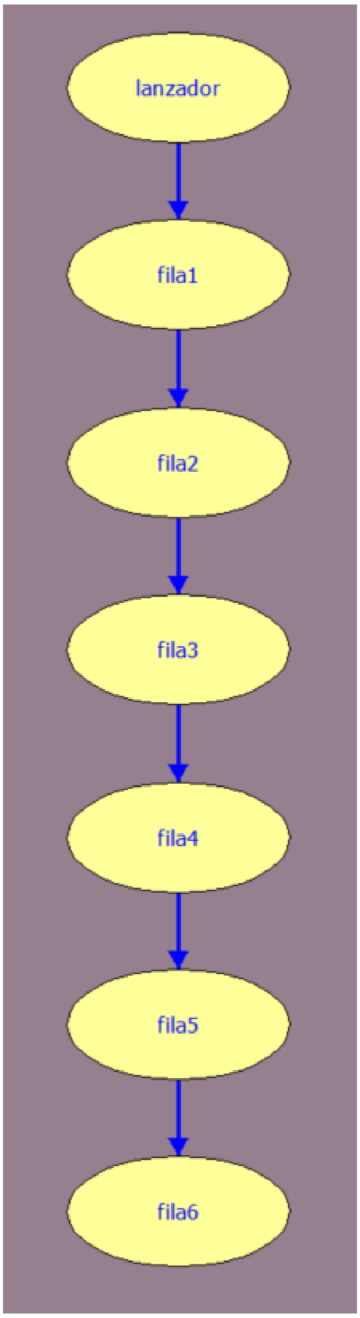

Figura 2: Red bayesiana para el lanzamiento de una bola desde cualquier posición

2.1. Variables i conexiones

Como podemos ver en la figura 2, la red diseñada para resolver el problema consta de 7 nodos, estos corresponden a las diferentes filas de la matriz tablero (figura 1) añadiendo una fila adicional en la parte superior desde donde se lanzará la bola.

Cada uno de estos nodos tiene 9 estados (figura 3), estos corresponden a las columnas de la matriz, por tanto, cogiendo el estado y el nodo en el que está, tenemos una posición de la matriz.

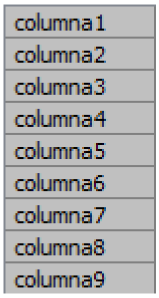

Figura 3: Estados de un nodo

Para las conexiones entre nodos, únicamente se han conectado las filas entre si, como se puede ver en la red (figura 2), esto es debido a que solo tenemos un nodo por cada fila, i la "discriminación"de los cilindros en vez de hacerse mediante conexiones se hará a través de las probabilidades que se presentan en el siguiente subapartado.

La red se ha definido de esta manera lineal, ya que como se puede leer en el apartado 2.4, en una de las versiones anteriores antes de llegar a esta solución se opto por una solución más visual realizando toda la matriz y sus posiciones pero como se explica en el punto 2.4 no era muy buena solución así que se simplificó para dejar una red más limpia y más exacta.

2.2. Tablas de probabilidades

Una vez definidos los nodos, sus posibles estados y las conexiones entre ellos, se deciden las probabilidades de cada estado, para ello, se ha definido para cada nodo una tabla de probabilidades.

Para las probabilidades del nodo lanzador se ha introducido manualmente la probabilidad de 1/9 en cada uno de los estados de que sea lanzado por cierta columna (figura 4, ya que en ningún punto se ha especificado que una columna tenga más probabilidades que las otras en que la bola se lance por ella.

Para las probabilidades de las filas, se han definido dos tablas de probabilidad diferentes. Una para las filas pares (figura 5), donde los cilindros se encuentran en las columnas 2, 4, 6 i 8. I otra para las filas impares (figura 6), donde los cilindros se encuentran en las posiciones 3, 5 i 7. Para todos las posiciones que se encuentran encima de un cilindro, la bola caerá a derecha o izquierda con una probabilidad de 0.5 para ambos casos, como se ha comentado anteriormente en la introducción.

columna1	0,11111111...
columna2	0,11111111...
columna3	0,11111111...
columna4	0,11111111...
columna5	0,11111111...
columna6	0,11111111...
columna7	0,11111111...
columna8	0,11111111...
columna9	0,11111111...

Figura 4: Tabla de probabilidades para el nodo lanzador

fila1	columna1	columna2	columna3	columna4	columna5	columna6	columna7	columna8	columna9
columna1	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna3	0,0	0,5	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna5	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0
columna6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,0
columna8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0

Figura 5: Tabla de probabilidades para las filas pares

lanzador	columna1	columna2	columna3	columna4	columna5	columna6	columna7	columna8	columna9
columna1	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna2	0,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna4	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
columna5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,0	0,0
columna7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,0
columna9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

Figura 6: Tabla de probabilidades para las filas impares

Por tanto, una vez definidas todas las probabilidades podemos ver como quedan las probabilidades generales de todas los estados de las diferentes filas en la figura 7, y se puede comprobar que como no se ha seleccionado ningún nodo de salida y es igual de probable que se lance por cualquiera de las columnas, la probabilidad de que lleguen a una columna o otra es simétrica siendo más probable que llegue a uno de los extremos (columna 1 o 9) que no a la columna central (columna 5).

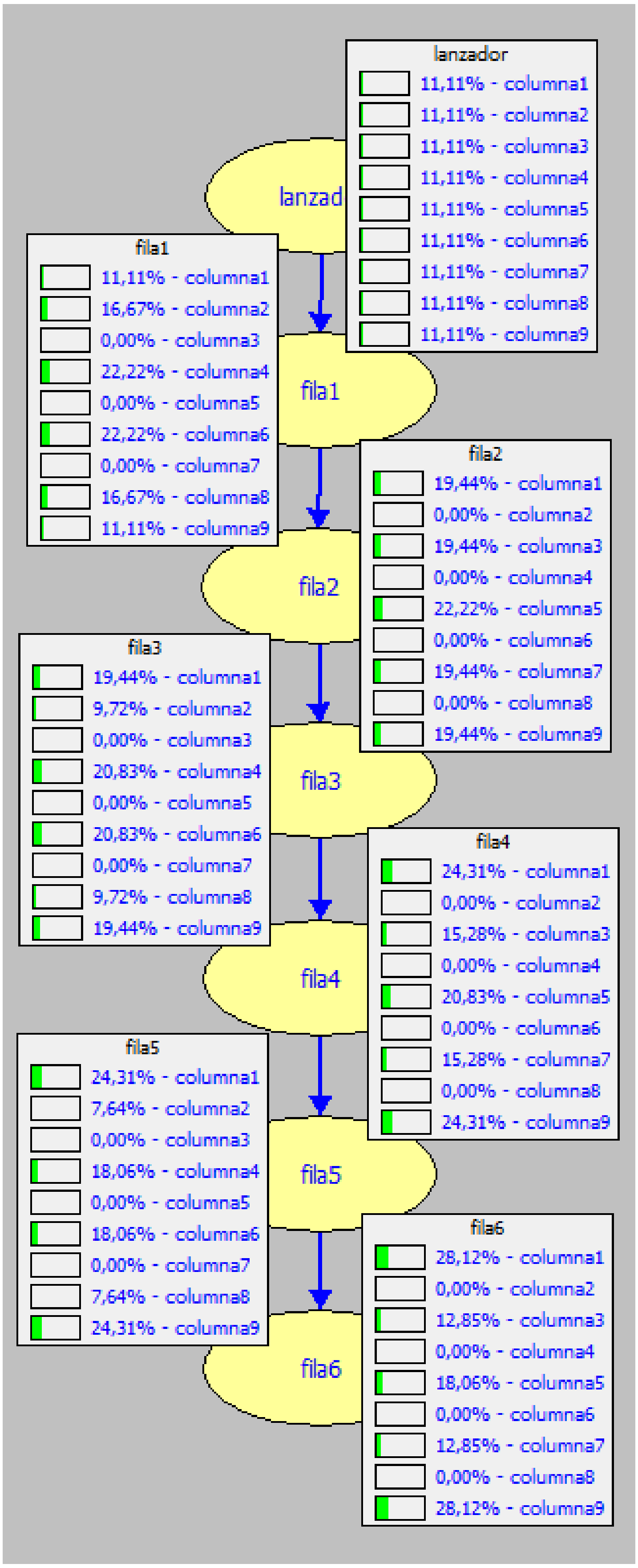

Figura 7: Tabla de probabilidades para las filas impares

2.3. Respuesta a las preguntas

Una vez definida y preparada la red ya podemos dar respuesta a las preguntas planteadas:

¿Cual es la probabilidad de que termine en la columna *j* sabiendo que la hemos lanzado desde *j'*?

Para ello hemos planteado varias j i también varias j'.

En primer lugar nos hemos planteado la más fácil, que probabilidad hay de que acabe en la columna 2 si se lanza desde la columna 1? Esto debería darnos 0, ya que el 100 % debería ir para la columna 1, y es lo que podemos observar en la figura 8.

Una vez hecha la prueba 1 mirando que pasa si se lanza desde la columna 1, se ha probado que pasa si se lanza desde cada una de las posiciones i podemos observar lo siguiente:

- Para j = 1 (columna 1), la probabilidad de que llegue a la columna 1 es la más alta (100.00 %) como podemos ver en la figura 8.
- Para j = 2 (columna 2), la probabilidad de que llegue a la columna 1 es la más alta (68.75 %) como podemos ver en la figura 9.
- Para j = 3 (columna 3), la probabilidad de que llegue a la columna 1 es la más alta (45.31 %) como podemos ver en la figura 10.
- Para j = 4 (columna 4), la probabilidad de que llegue a la columna 5 es la más alta (31.25 %) como podemos ver en la figura 11.
- Para j = 5 (columna 5), la probabilidad de que llegue a la columna 5 es la más alta (31.25 %) como podemos ver en la figura 12.
- Para j = 6 (columna 6), la probabilidad de que llegue a la columna 5 es la más alta (31.25 %) como podemos ver en la figura 13.
- Para j = 7 (columna 7), la probabilidad de que llegue a la columna 9 es la más alta (45.31 %) como podemos ver en la figura 14.
- Para j = 8 (columna 8), la probabilidad de que llegue a la columna 9 es la más alta (68.75 %) como podemos ver en la figura 15.
- Para j = 9 (columna 9), la probabilidad de que llegue a la columna 9 es la más alta (100.00 %) como podemos ver en la figura 16.

Como conclusión a la lista de probabilidades anterior, podemos decir que, como también se ha comentado anteriormente en la opción de que no haya ninguna columna de lanzamiento seleccionada, el caso de lanzar la bola desde las diferentes columnas de la matriz es simétrico, como se puede ver con las pruebas anteriores.

Como no se ha especificado ninguna j' en las casuísticas anteriores, se presentan todos los casos de manera visual i posteriormente se detalla dos columnas en concreto, una para j i otra para j' tal y como se pide en la pregunta.

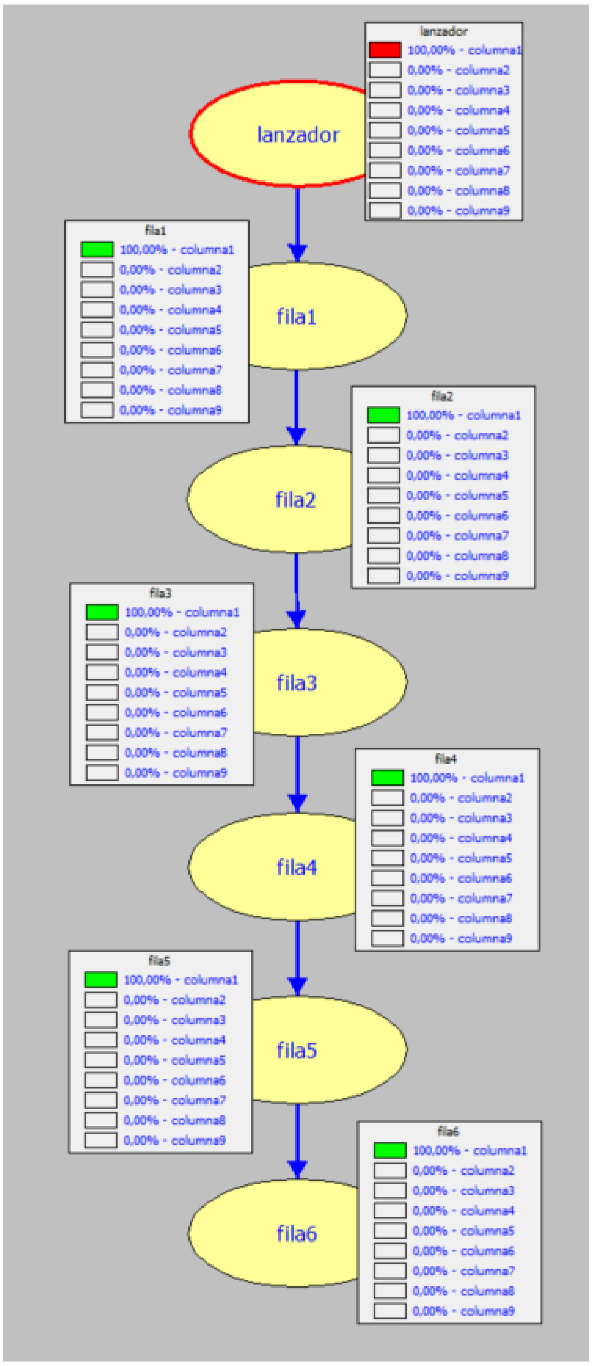

Figura 8: Lanzamiento desde la columna 1

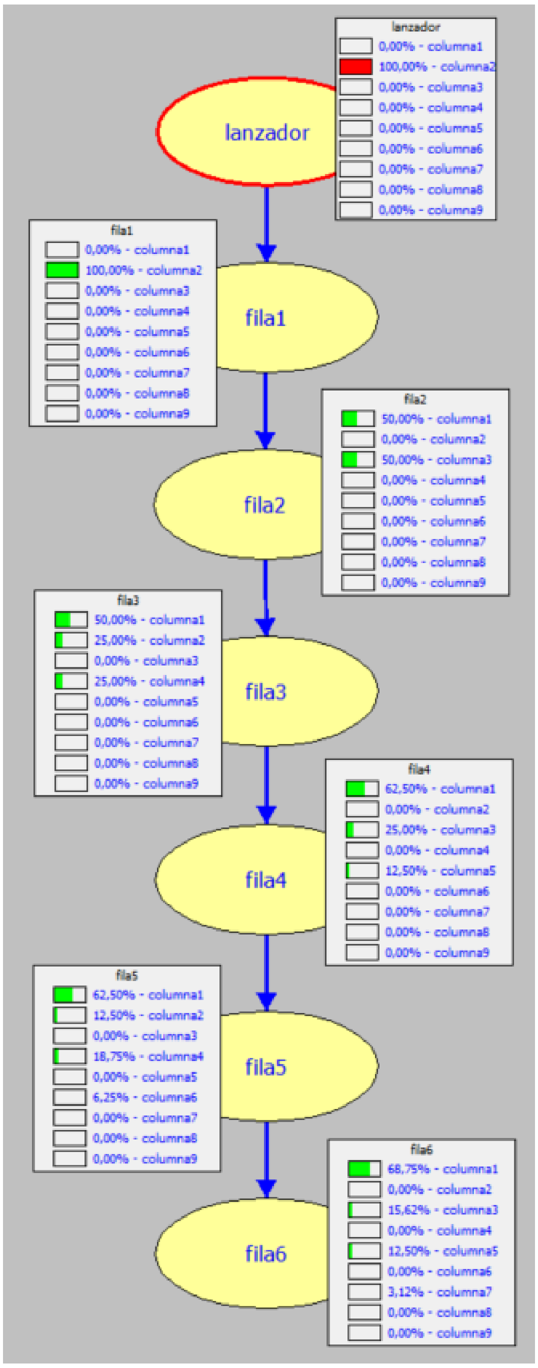

Figura 9: Lanzamiento desde la columna 2

Para j = *1*, la probabilidad de que llegue a la columna j*'* = *5* es del **0** %.

Para j = *2*, la probabilidad de que llegue a la columna j*'* = *7* es del **3.12** %.

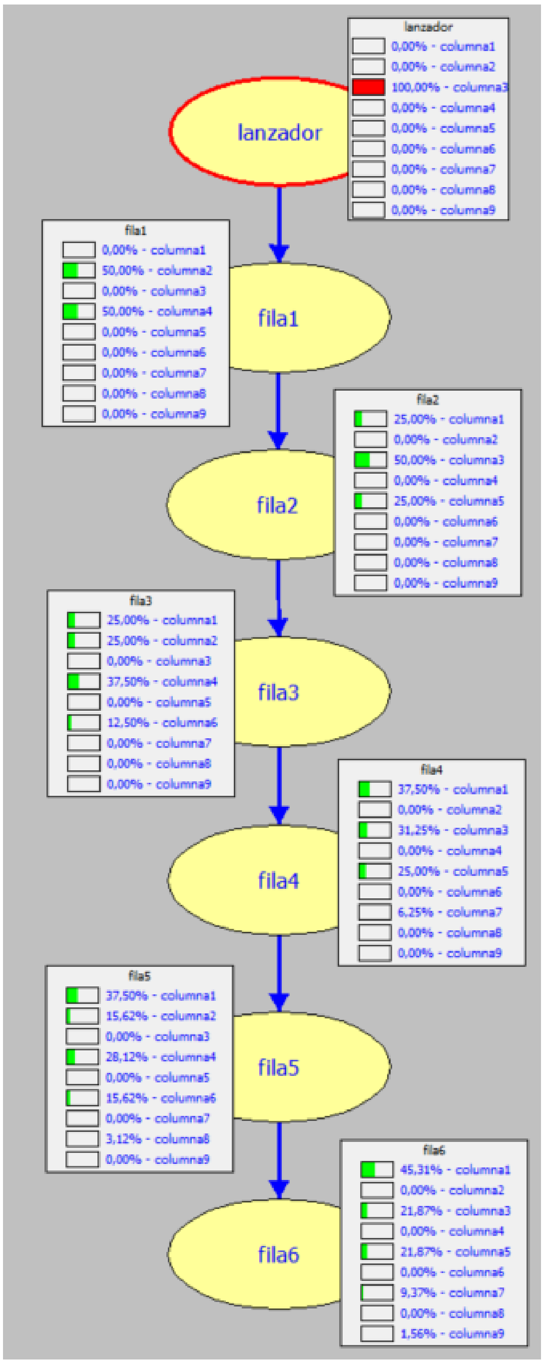

Figura 10: Lanzamiento desde la columna 3

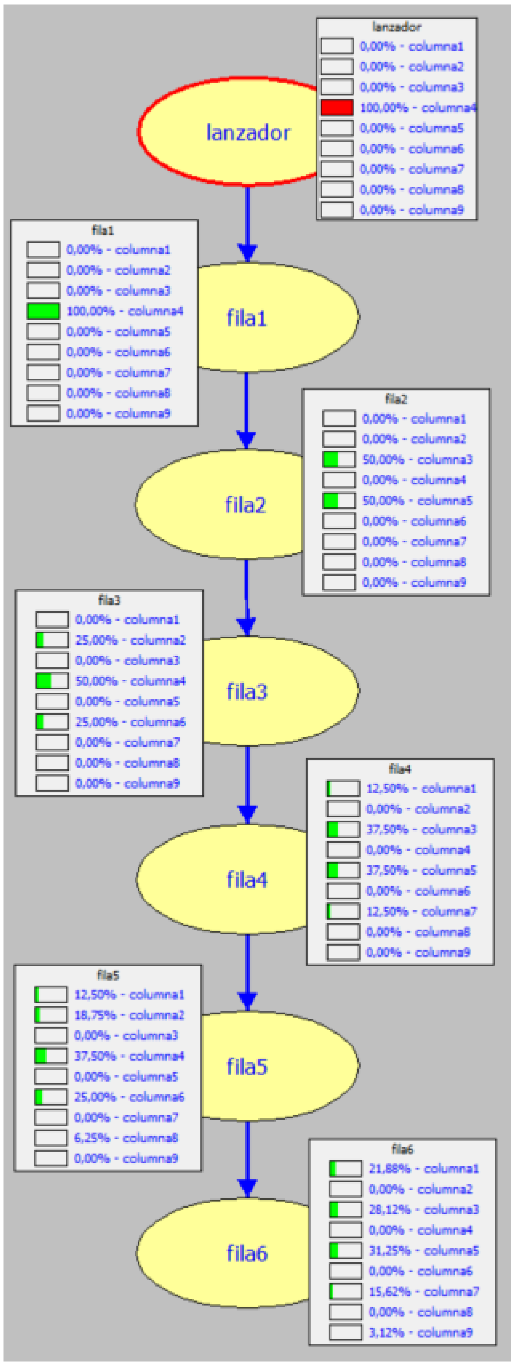

Figura 11: Lanzamiento desde la columna 4

Para j = *3*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *1* es del **45.31 %**.

Para j = *4*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *3* es del **28.12 %**.

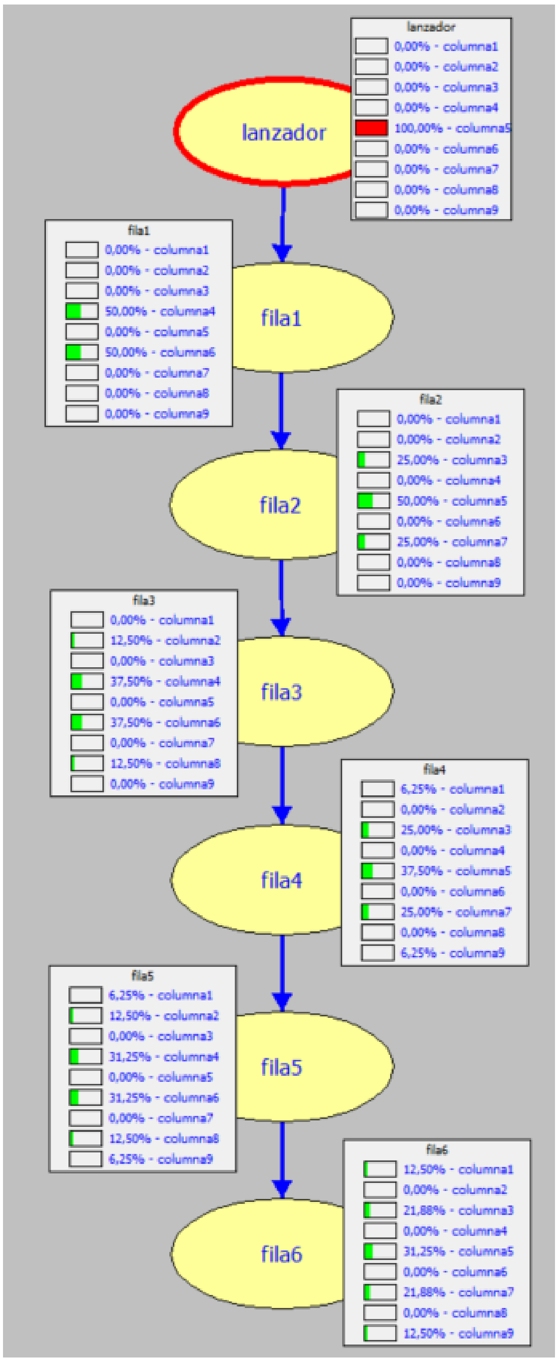

Figura 12: Lanzamiento desde la columna 5

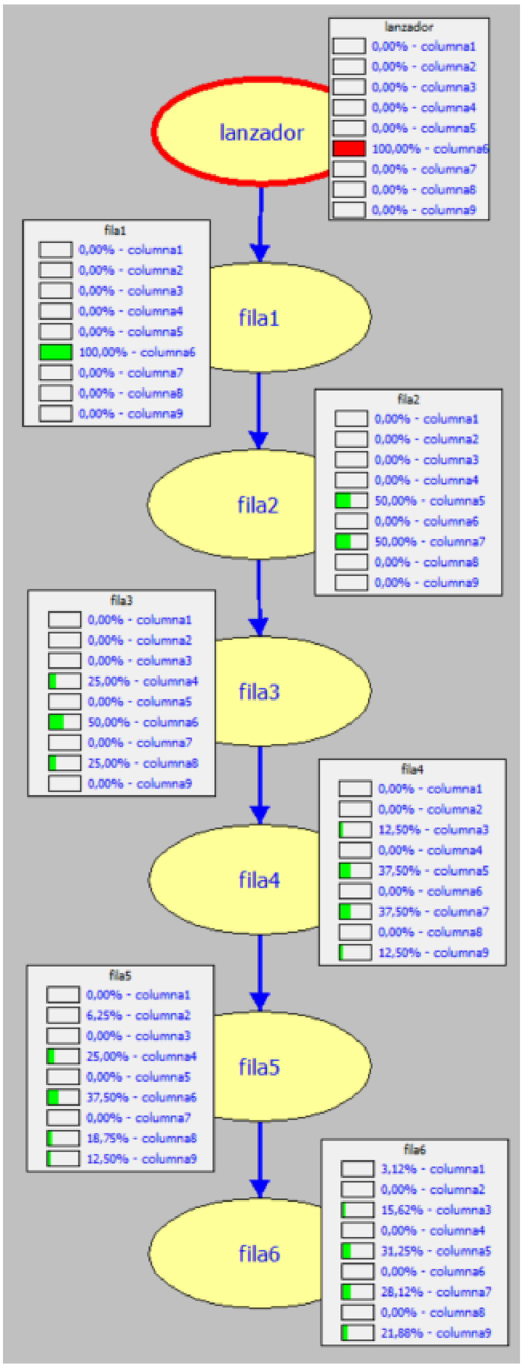

Figura 13: Lanzamiento desde la columna 6

Para j = *5*, la probabilidad de que llegue a la columna j’ = *3* es del **21.88 %**.

Para j = *6*, la probabilidad de que llegue a la columna j’ = *9* es del **21.87 %**.

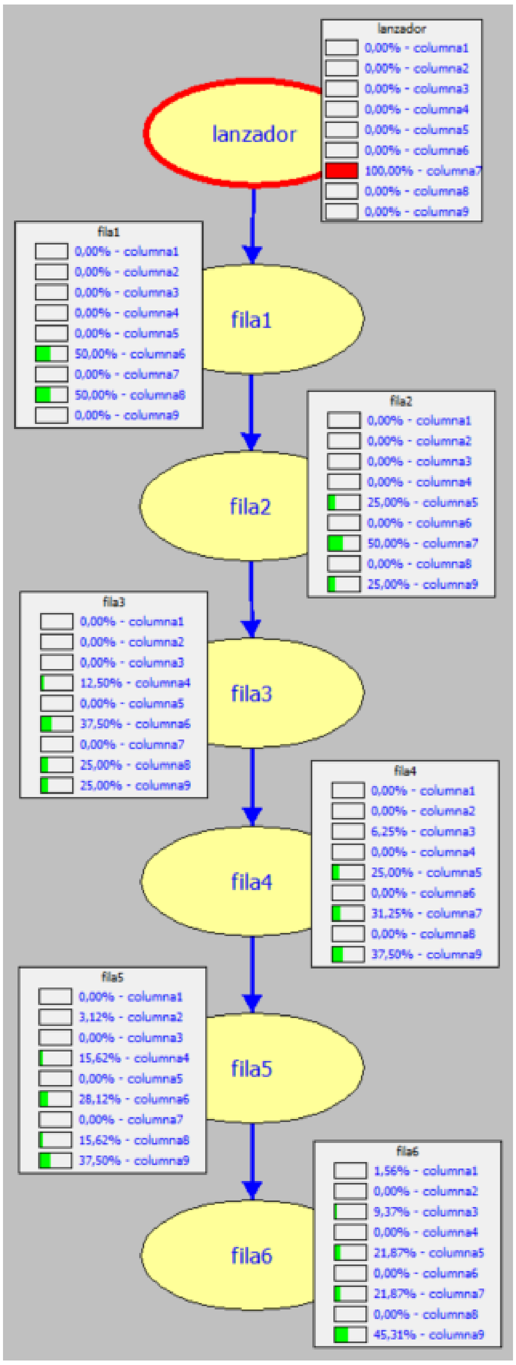

Figura 14: Lanzamiento desde la columna 7

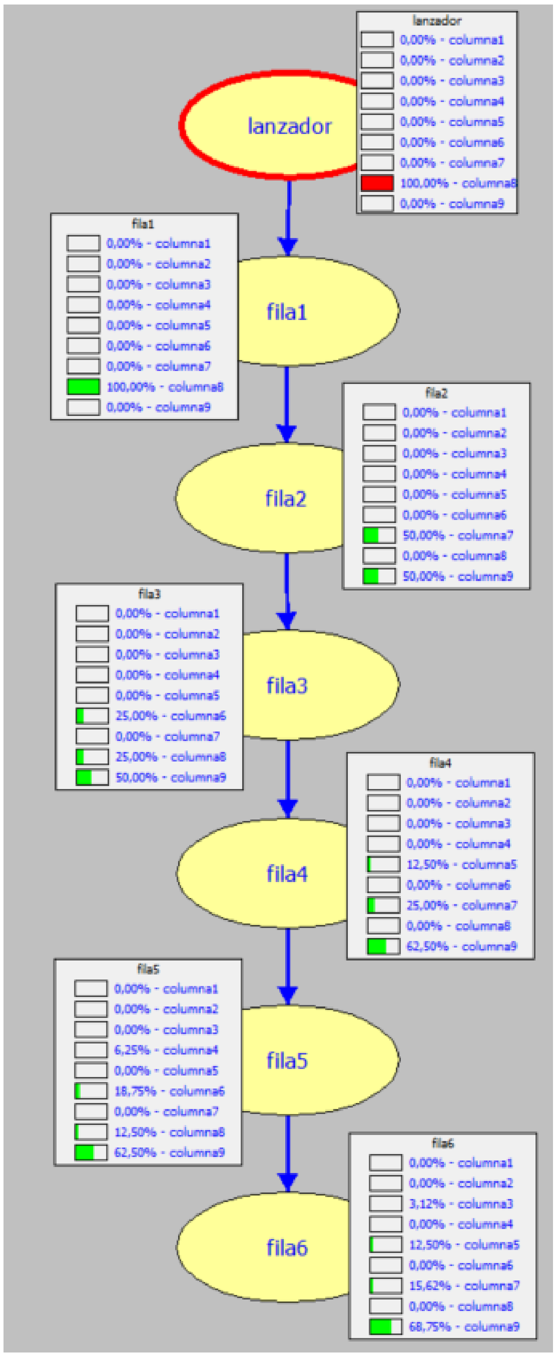

Figura 15: Lanzamiento desde la columna 8

Para j = *7*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *1* es del **1.56** %.

Para j = *8*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *5* es del **12.50** %.

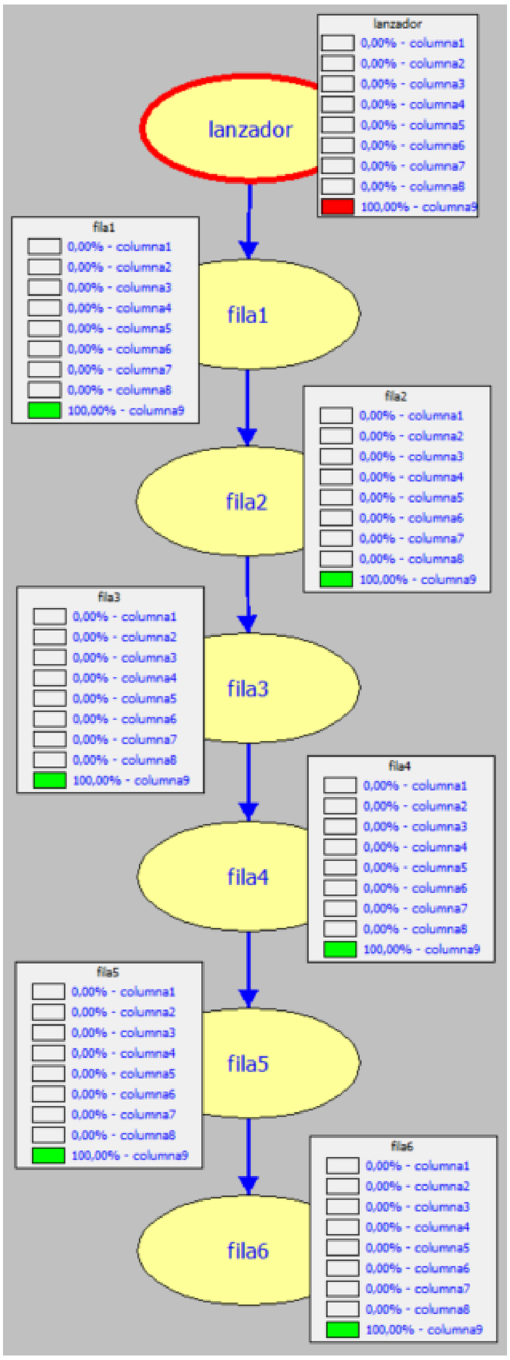

Figura 16: Lanzamiento desde la columna 9

Para j = *9*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *7* es del **0 %**.

Para cerrar esta pregunta me gustaría destacar que no se ha puesto en ningún caso que j' sea 2, 4, 6 o 8, ya que en estas posiciones se encuentra un cilindro y por tanto las probabilidades de que la bola acabe en esta posición siempre son de 0.

¿Cual es la probabilidad de que hayamos lanzado desde *j* sabiendo que ha terminado en *j'*?

De la misma manera que para la pregunta anterior hemos marcado la columna 1 y hemos esperado que el 100 % de probabilidad fuese que ha acabado en la columna 1, para el caso inverso hemos hecho lo mismo, pero la probabilidad esperada no es el 100 % en la columna 1 ya que en este caso puede haber salido desde varias posiciones, concretamente puede haber salido desde la columna 1, 2, 3 o 4.

Igual que para la pregunta anterior, para esta pregunta también hemos resuelto todos los casos posibles y se van a plantear primero de manera escrita con la posibilidad más alta y luego de manera visual con un caso aleatorio para los valores de *j*.

En esta pregunta, a diferencia de la pregunta anterior, no podemos testear todas las columnas ya que *j'* solo puede tener el valor de 1, 3, 5, 7 i 9, ya que en el resto de las columnas hay un cilindro y por tanto la bola no podrá acabar en esa posición.

- Para j' = 1 (columna 1), la probabilidad de que haya sido lanzado por la columna 1 es la más alta (39.51 %) como podemos ver en la figura 17
- Para j' = 3 (columna 3), la probabilidad de que haya sido lanzado por la columna 4 es la más alta (24.32 %) como podemos ver en la figura 18
- Para j' = 5 (columna 5), la probabilidad de que haya sido lanzado por la columna 4, 5 o 6 son la misma i la más alta (19.23 %) como podemos ver en la figura 19
- Para j' = 7 (columna 7), la probabilidad de que haya sido lanzado por la columna 6 es la más alta (24.32 %) como podemos ver en la figura 20
- Para j' = 9 (columna 9), la probabilidad de que haya sido lanzado por la columna 9 es la más alta (39.51 %) como podemos ver en la figura 21

Como conclusión podemos sacar la misma conclusión que en la pregunta anterior, viendo que las probabilidades altas son simétricas i que para la posición 5 (la columna central) la probabilidad está más ajustada ya que la más alta esta en 3 columnas. Esto también se podía suponer al ver el resultado de la pregunta anterior i ver que desde las columnas 4, 5 i 6 la probabilidad de que caiga en la columna 5 es la misma.

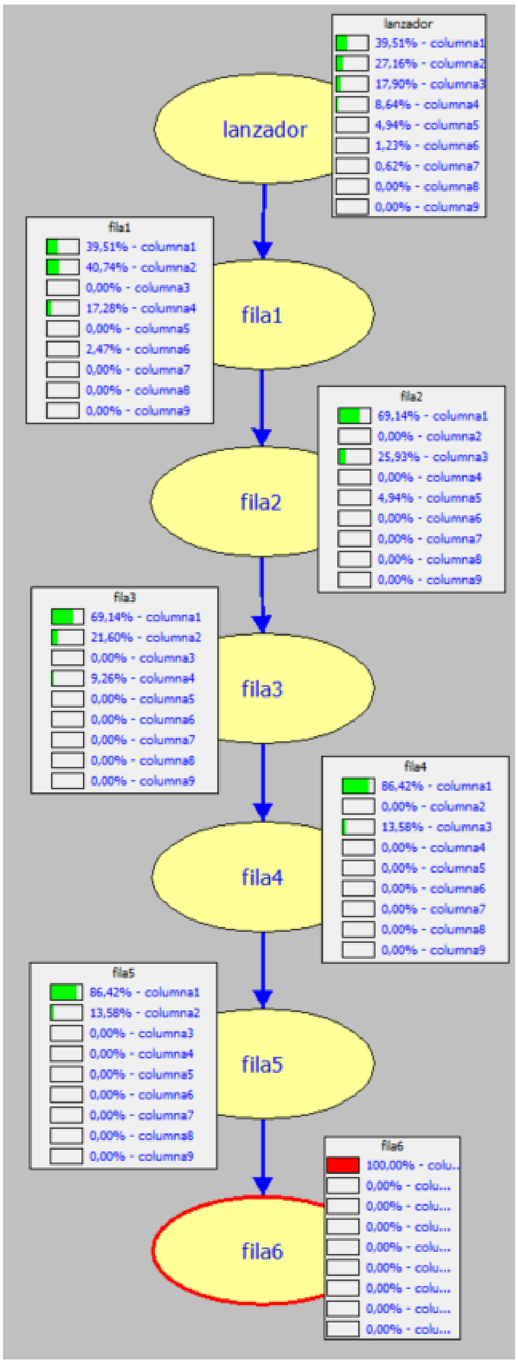

Figura 17: Ha acabado en la columna 1

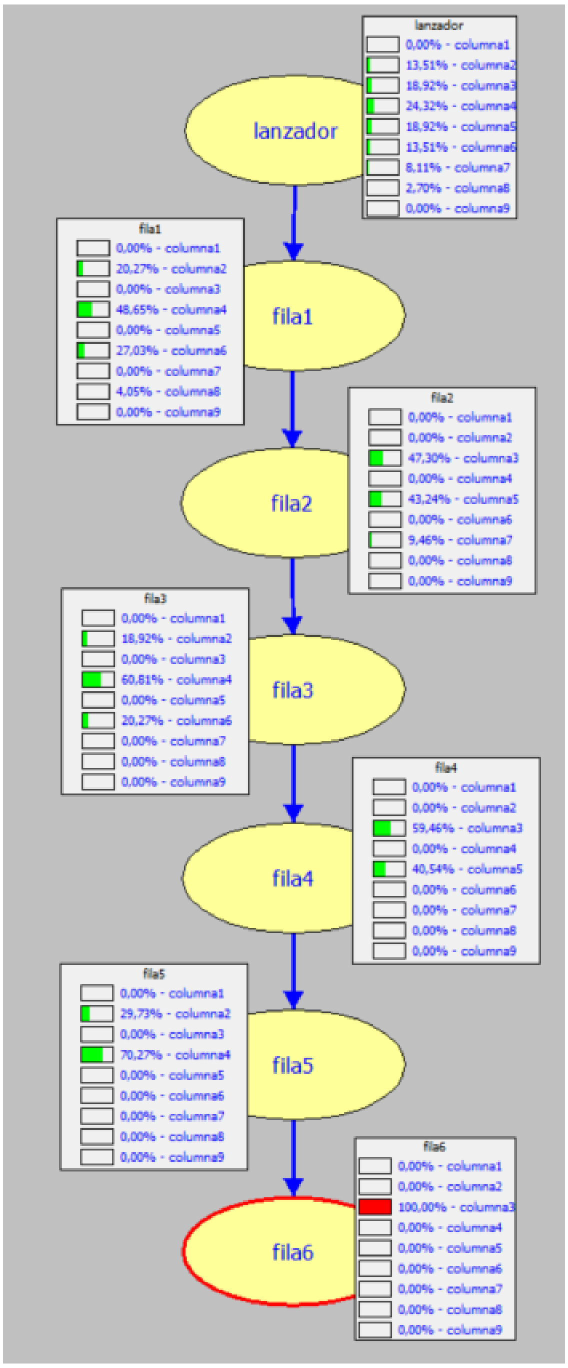

Figura 18: Ha acabado en la columna 3

Para *j' = 1*, la probabilidad de que haya sido lanzada por la columna *j = 3* es del **17.90 %** y de la columna *j = 7* es del **0.62 %**

Para *j' = 3*, la probabilidad de que haya sido lanzada por la columna *j = 4* es del **24.32 %** y de la columna *j = 5* es del **18.92 %**

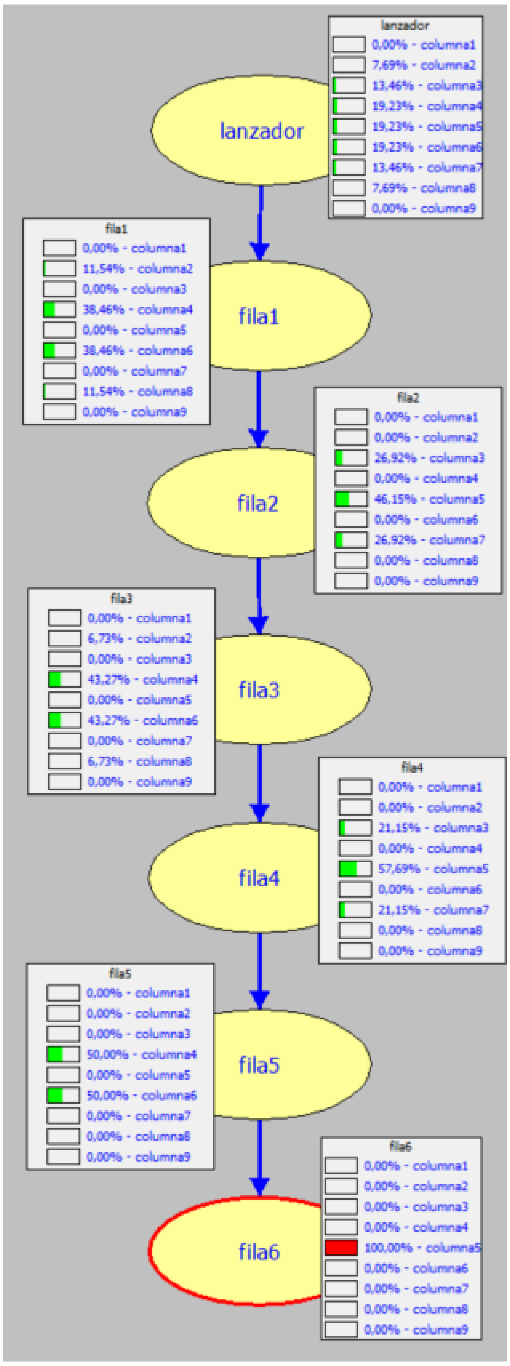

Figura 19: Ha acabado en la columna 5

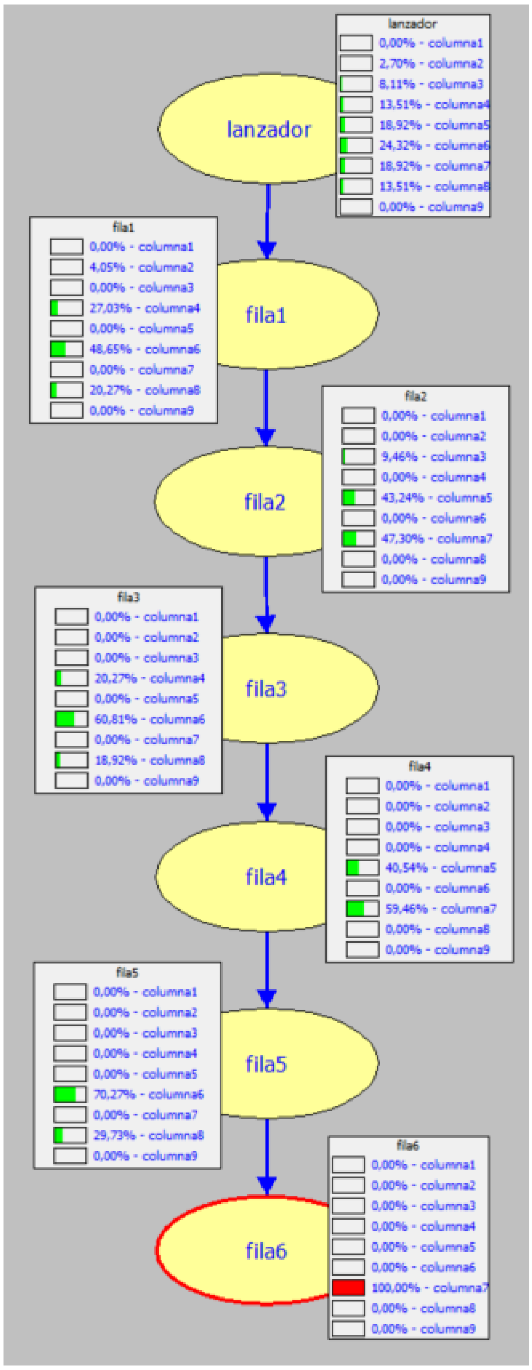

Figura 20: Ha acabado en la columna 7

Para *j' = 5*, la probabilidad de que haya sido lanzada por la columna $j = 1$ es del **0.00 %** y de la columna $j = 8$ es del **7.69 %**

Para *j' = 7*, la probabilidad de que haya sido lanzada por la columna $j = 2$ es del **2.70 %** y de la columna $j = 9$ es del **0.00 %**

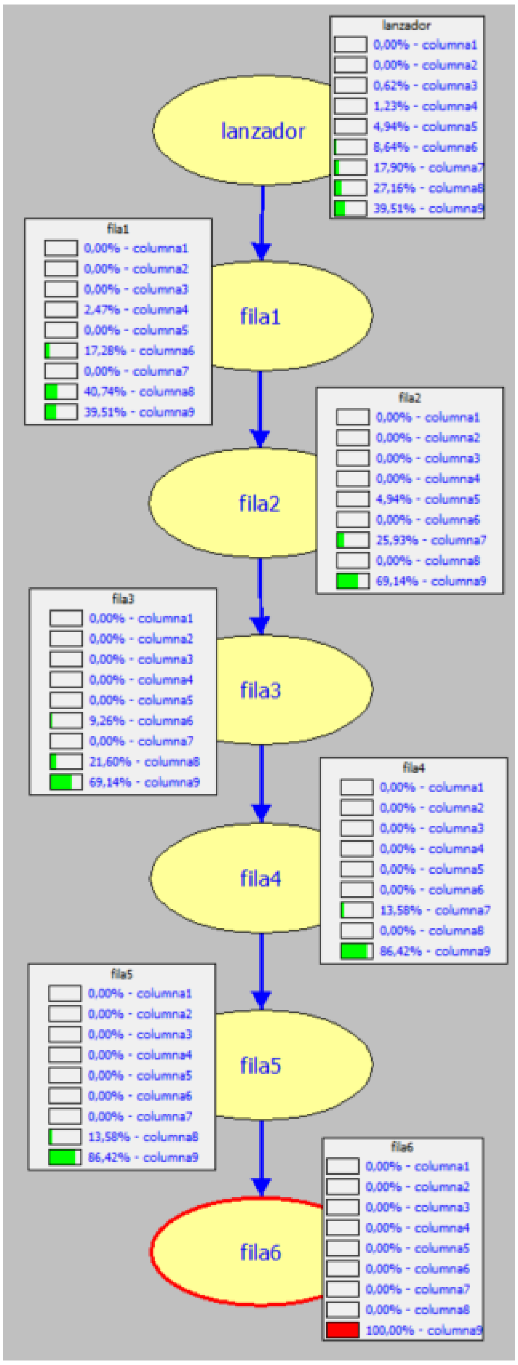

Figura 21: Ha acabado en la columna 9

Para *j'* = *9*, la probabilidad de que haya sido lanzada por la columna *j* = *6* es del **8.64 %**.

Para los valores de *j* i *j'* en esta pregunta se han cogido exactamente los mismos valores que se han especificado en la pregunta anterior de manera que se puede hacer una comparación directa entre ambas preguntas.

¿Cual es la probabilidad de que la hayamos lanzado desde *j* y termine en *j'* sabiendo que ha pasado por *(a,b)*?

Para responder esta pregunta se volverán a usar las columnas *j* y *j'* se marcará una posición aleatoria (a,b) que condicionará el resultado, podemos ver las respuestas gráficamente.

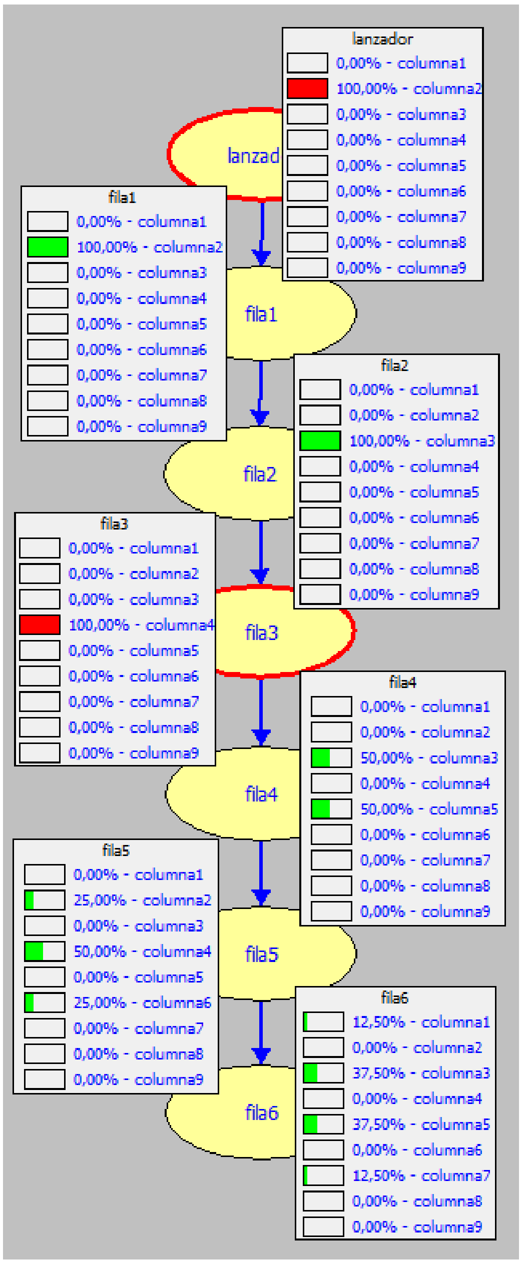

Figura 22: Lanzado por la columna 2

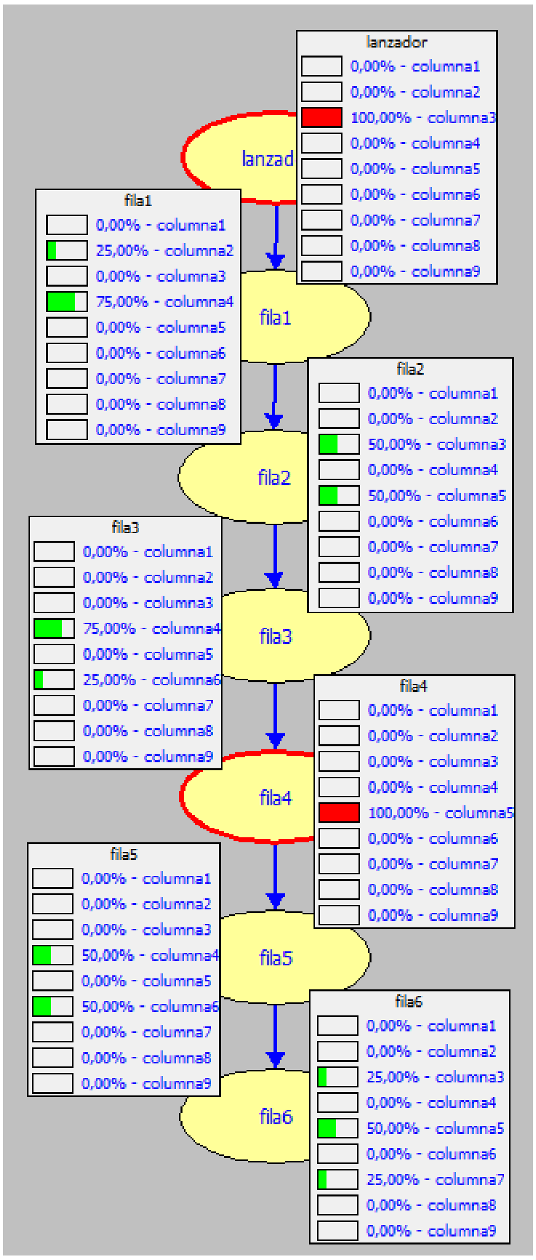

Figura 23: Ha acabado en la columna 3

Para j = *2*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *7* pasando por la posición (3, 4) es del **12.50 %**.

Para j = *3*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *1* pasando por la posición (4, 5) es del **0 %**.

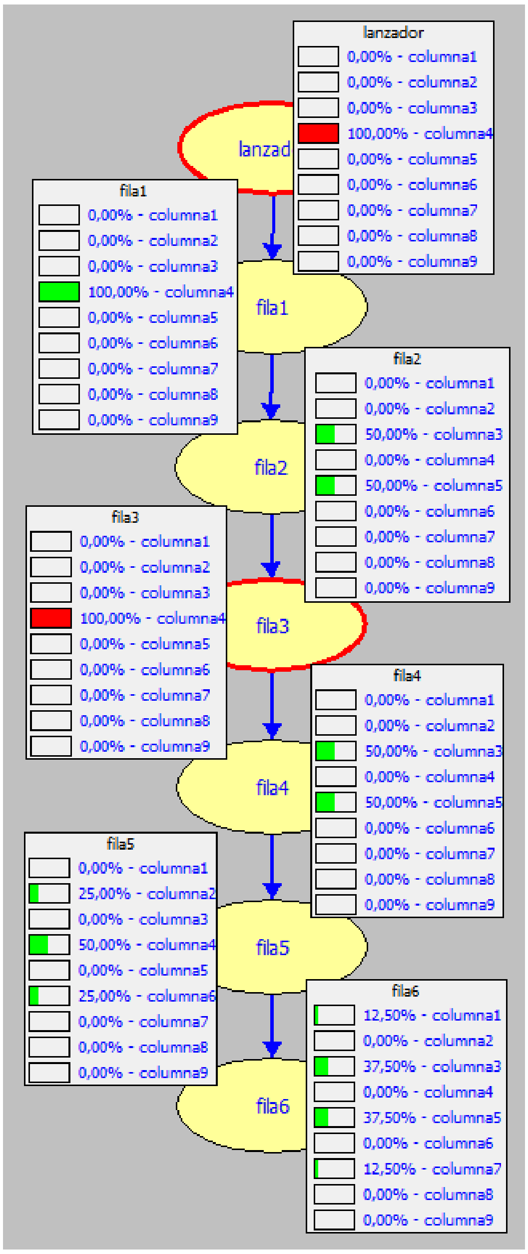

Figura 24: Lanzado por la columna 4

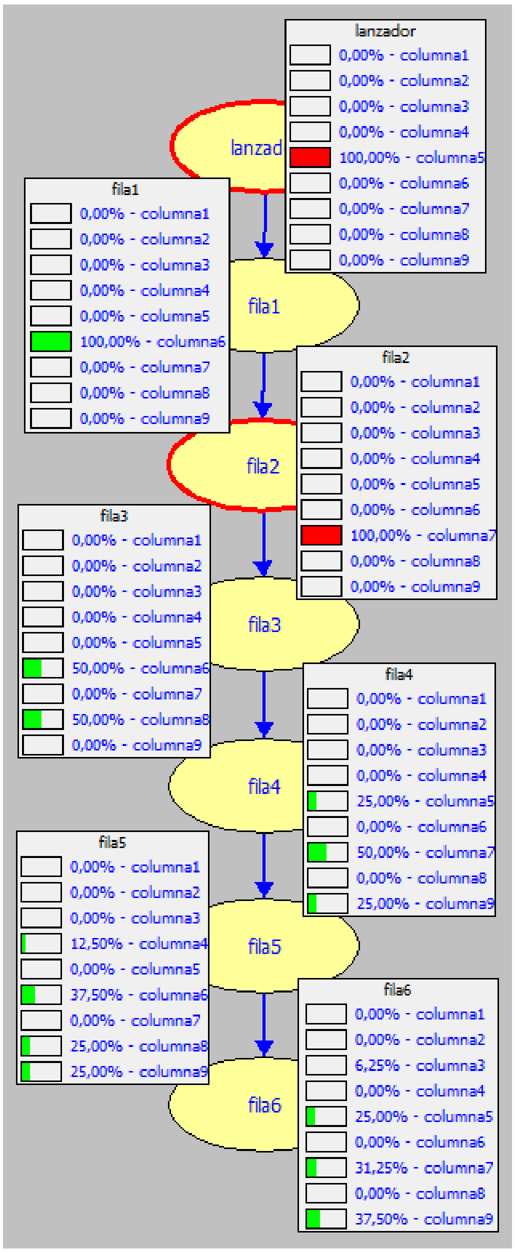

Figura 25: Ha acabado en la columna 5

Para *j* = *4*, la probabilidad de que llegue a la columna *j'* = *3* pasando por la posición (3, 4) es del **37.50 %**.

Para *j* = *5*, la probabilidad de que llegue a la columna *j'* = *3* pasando por la posición (2, 7) es del **6.25 %**.

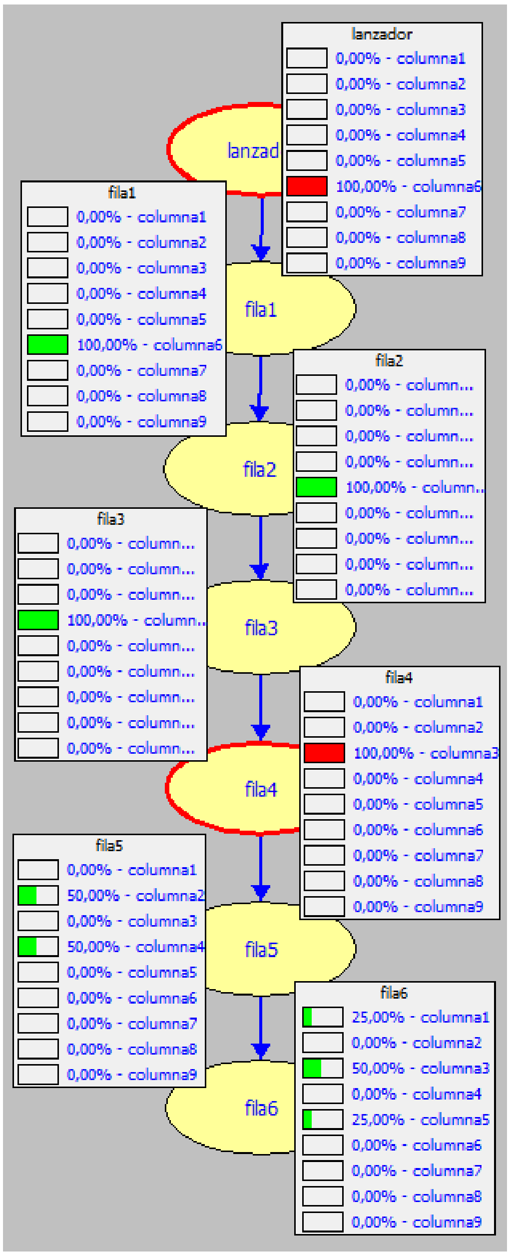

Figura 26: Lanzado por la columna 6

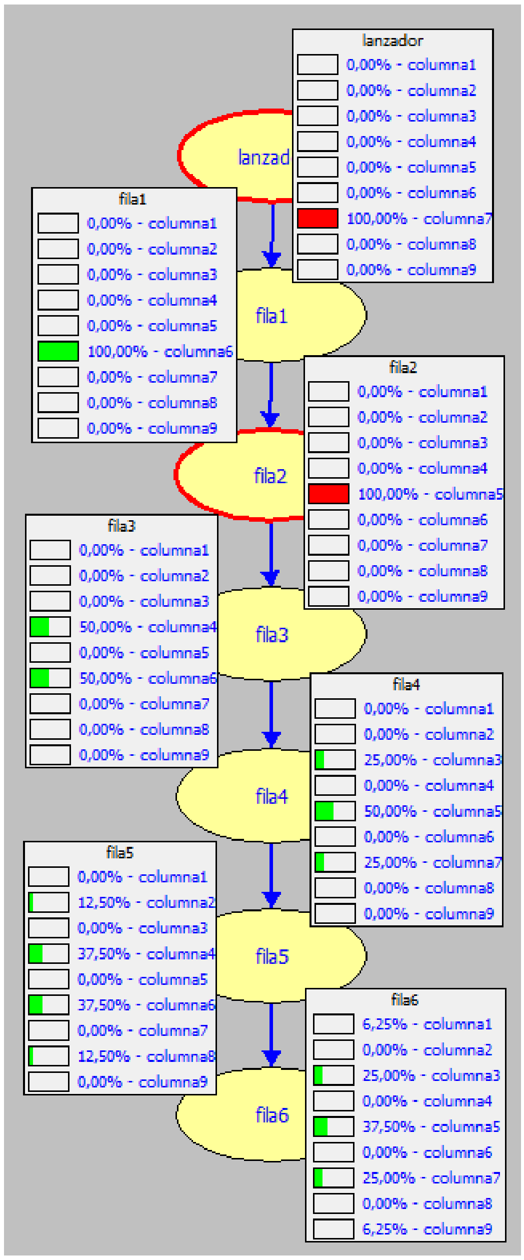

Figura 27: Ha acabado en la columna 7

Para *j* = *6*, la probabilidad de que llegue a la columna *j' = 9* pasando por la posición (4, 3) es del **0** %.

Para *j* = *7*, la probabilidad de que llegue a la columna *j' = 1* pasando por la posición (2, 5) es del **6.25** %.

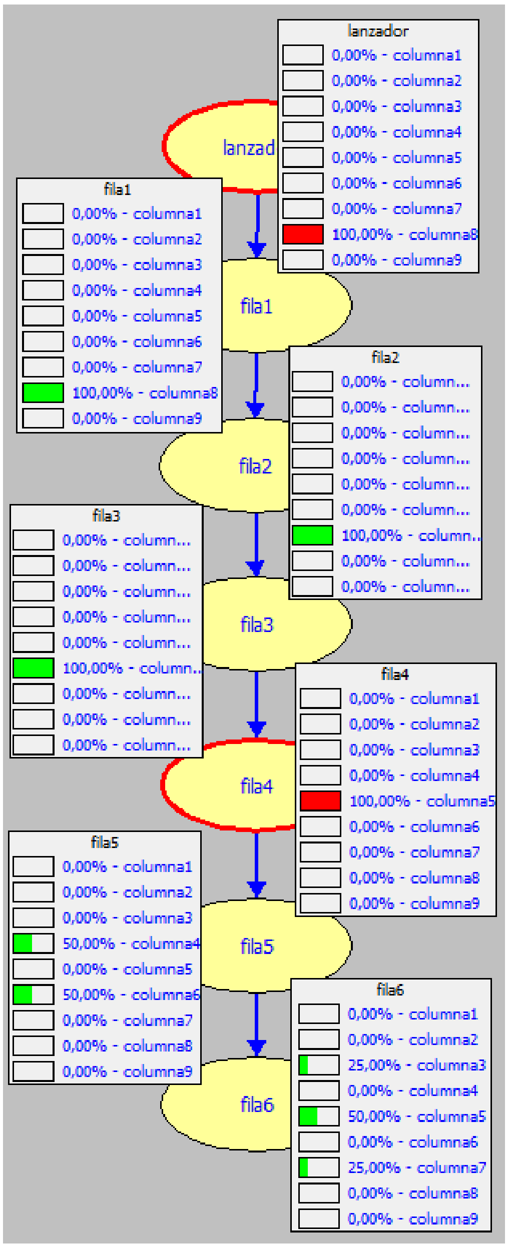

Figura 28: Ha acabado en la columna 8

Para j = *8*, la probabilidad de que llegue a la columna j*' = 5* pasando por la posición (4, 5) es del **50 %**.

Se han ignorado las columnas j = 1 i j = 9, ya que tienen el 100 % de probabilidad de que acaben en las columnas 1 y 9 respectivamente

2.4. Versiones anteriores

Como se ha comentado al inicio de este apartado, al empezar a definir la red bayesiana se hicieron varias versiones, la primera de ellas, en forma de matriz, donde aparece cada posición de la matriz por donde puede pasar la bola (figura 29). En este caso, las conexiones entre nodos se ven de manera más visual.

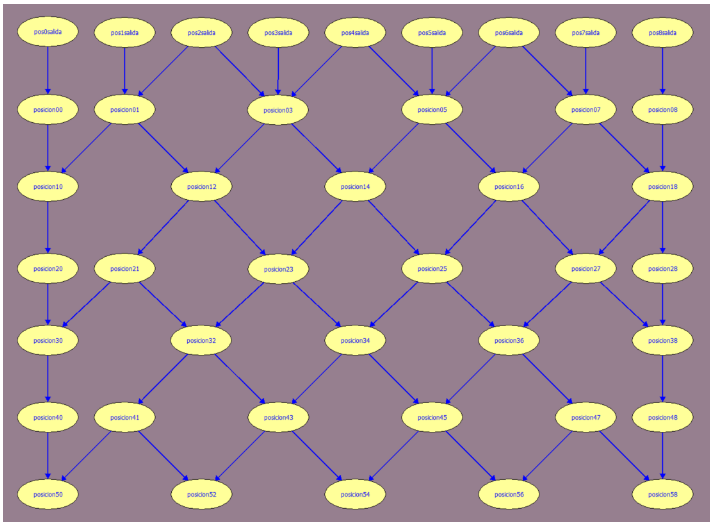

Figura 29: Red bayesiana versión inicial - matriz

Una vez definida la red bayesiana, al hacer ciertas pruebas como la de la figura 30 donde se puede ver que se marca que la pelota ha de pasar por la posición (2,1). Al marcar esa posición la posición (2,3) debería marcar su probabilidad de pasa a 0. Para ello todos los nodos deberían estar conectados entre ellos y para realizar tal cosa la red bayesiana se volvería inmensa. Este es el principal motivo por el cual se decidió simplificar la red y por tanto llegar a la red explicada anteriormente.

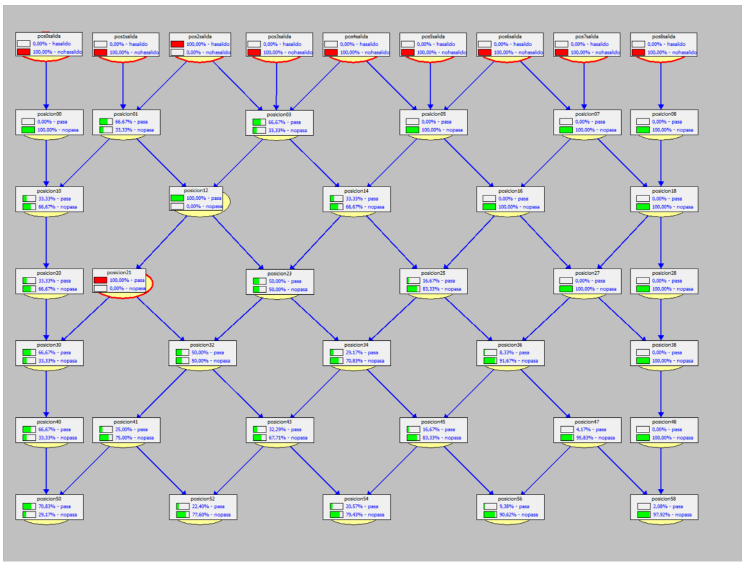

Figura 30: Error en la red bayesiana en forma de matriz

3. Extension 1 - Lanzamiento de varias bolas

Para la primera extensión de la práctica se nos pide poder lanzar varias bolas desde cualquier posición de la matriz de manera secuencial.

Para resolver el problema hemos diseñado la red bayesiana de la figura 31, ésta red es una extensión de la red básica definida en el apartado anterior. Únicamente se ha duplicado toda la red y se ha a un nodo que nos indicará el porcentaje de pelotas que tiene cada columna, en otras palabras, si la columna 1 marca el 100 % significará que las dos bolas han llegado a la columna 1, en cambio, si la columna 1 marca el 50 % y la columna 3 el otro 50 %, una de las bolas habrá acabado en la columna 1 y la otra en la columna 3.

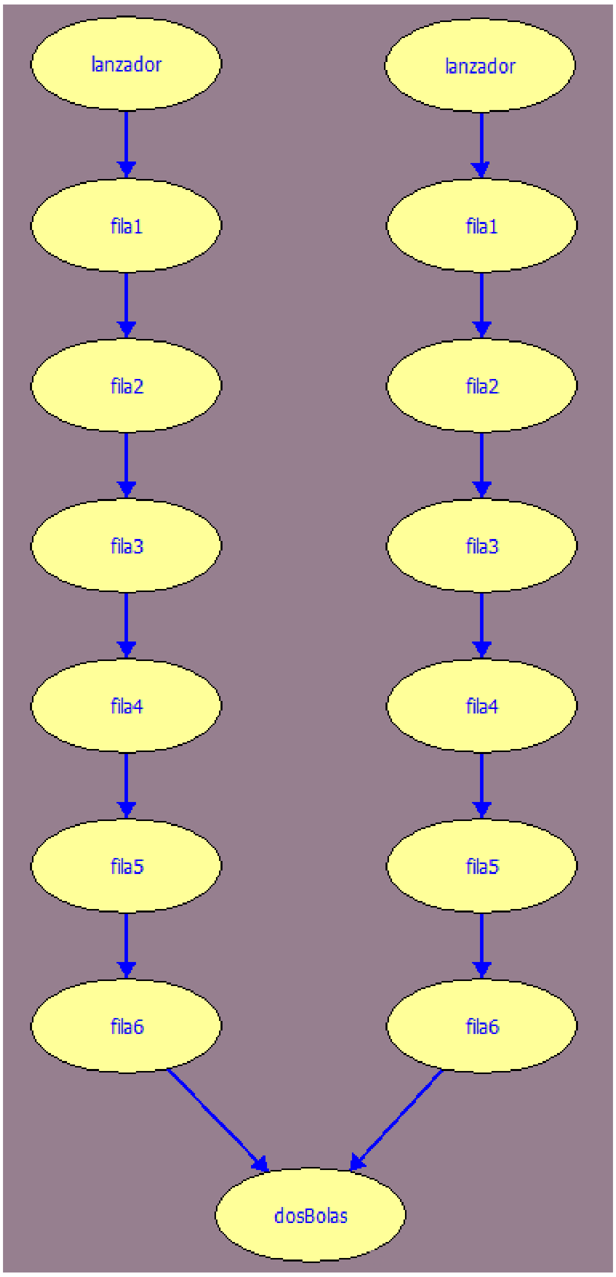

Figura 31: Red bayesiana para el lanzamiento secuencial de dos bolas

Para dos bolas parece simple, por ello se ha diseñado que pasaría al lanzar 3 bolas, esto lo podemos ver en la figura 32 donde se ha añadido otra columna de lanzamiento y también otro nodo para recoger la probabilidad que funciona de la misma manera que el nodo *dosBolas*, ya que su tabla de probabilidad es la misma pero en vez de que las probabilidades estén repartidas 50 % para cada bola, aqui cada bola representarà el 33.33 %.

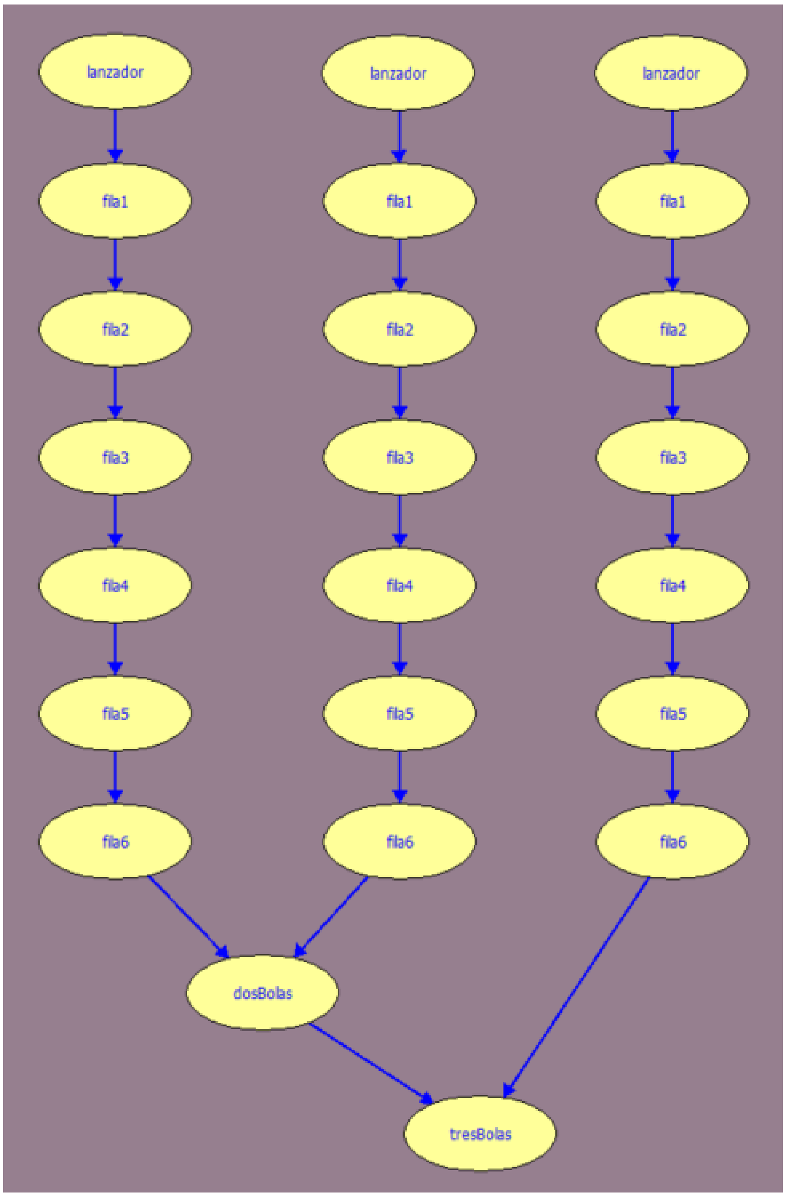

Figura 32: Red bayesiana para el lanzamiento secuencial de tres bolas

La tabla de probabilidades (figura 33) para todos los nodos que recogen la probabilidad del numero de bolas será la misma ya que estos siempre se agrupan de dos en dos, en el caso de querer añadir un nuevo lanzamiento, simplemente se ha de añadir una nueva columna de lanzamiento y un nodo *quatroBolas* que estará condicionado por *tresBolas* y la fila6 de la nueva columna.

fila6	columna1									columna2								
fila6	columna1	columna2	columna3	columna4	columna5	columna6	columna7	columna8	columna9	columna1	columna2	columna3	columna4	columna5	columna6	columna7	columna8	columna9
columna9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5
columna8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0
columna7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0
columna6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0
columna5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
columna4	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna3	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna2	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
columna1	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Figura 33: Tabla de probabilidad que recoge el numero de bolas que cae en cierta posición

En la tabla de probabilidades anterior solo podemos 2 casos, para las columnas 1 y 2 de una de las fila6, pero la idea se ve suficientemente reflejada en ello, simplemente la probabilidad de que esté en la posición de la fila6a y fila6b es 0.5 en ambos casos, i en la que coincide será 1.0.

Un ejemplo de ejecución de la extensión se puede ver en la figura 34 donde solo se muestran los paneles de lanzamiento, de la fila6 y de los dos nuevos nodos. En este ejemplo de ejecución podemos ver que realmente en los nuevos nodos se realiza una probabilidad teniendo en cuenta donde acabaria la bola y que donde más bolas pueden acabar lanzando 3 bolas, es en la columna central.

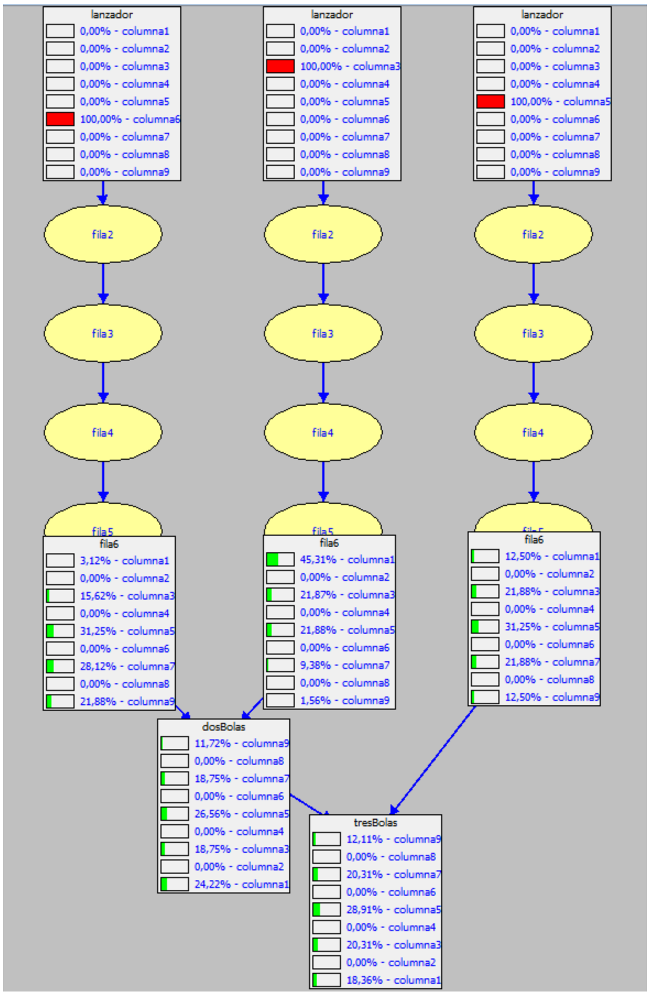

Figura 34: Ejecución del lanzamiento 3 bolas por 3 columnas diferentes

4. Extension 2 - Sesgo en la probabilidad de los cilindros

Por último, la segunda extensión de la práctica consiste en contemplar un sesgo para cada cilindro, en otras palabras, que la bola al impactar con el cilindro tenga una probabilidad de ir a derecha o izquierda variable dependiendo de p.

Para este problema se ha diseñado una red bayesiana (figura 35 que tiene 9 estados diferentes y que corresponden a los 9 posibles casos definidos. No se ha definido una p variable a la que tu les puedas introducir cualquier valor entre 0 y 100, sino que se han definido 9 posibles valores que son: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90. El valor que marca p es la probabilidad que tiene la bola de ir hacia la derecha, y por tanto la probabilidad de que vaya hacia la izquierda es de 1-p.

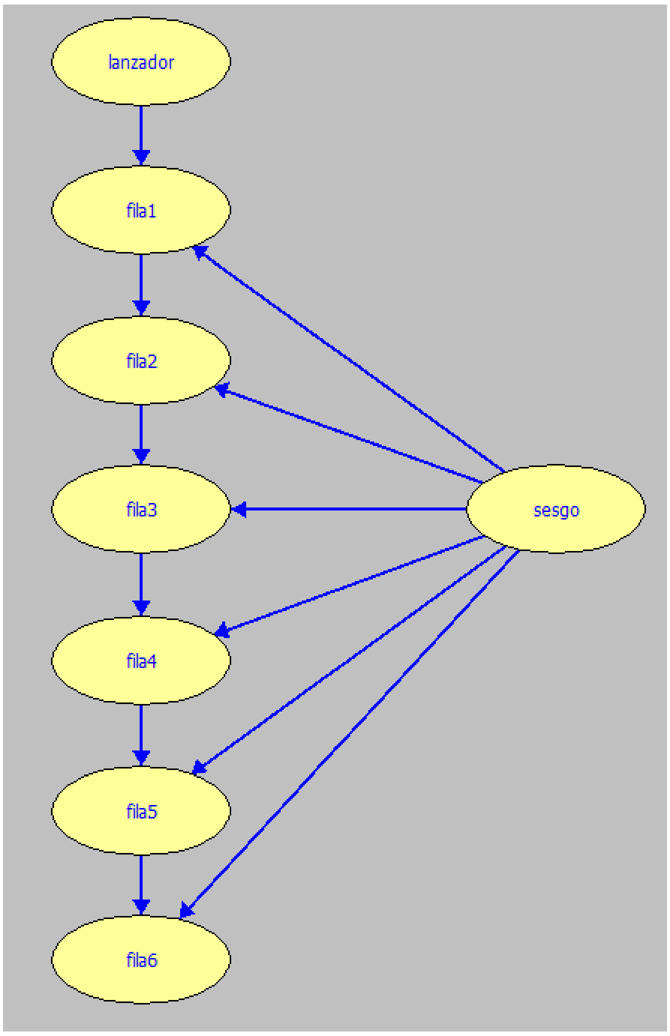

Figura 35: Red bayesiana para sesgo

Para esta red, es necesario marcar siempre el sesgo deseado ya que en caso contrario la probabilidad de todos los sesgos es de 11.11 % y no sabemos realmente cual es el sesgo exacto del cilindro, como podemos ver en la figura 36.

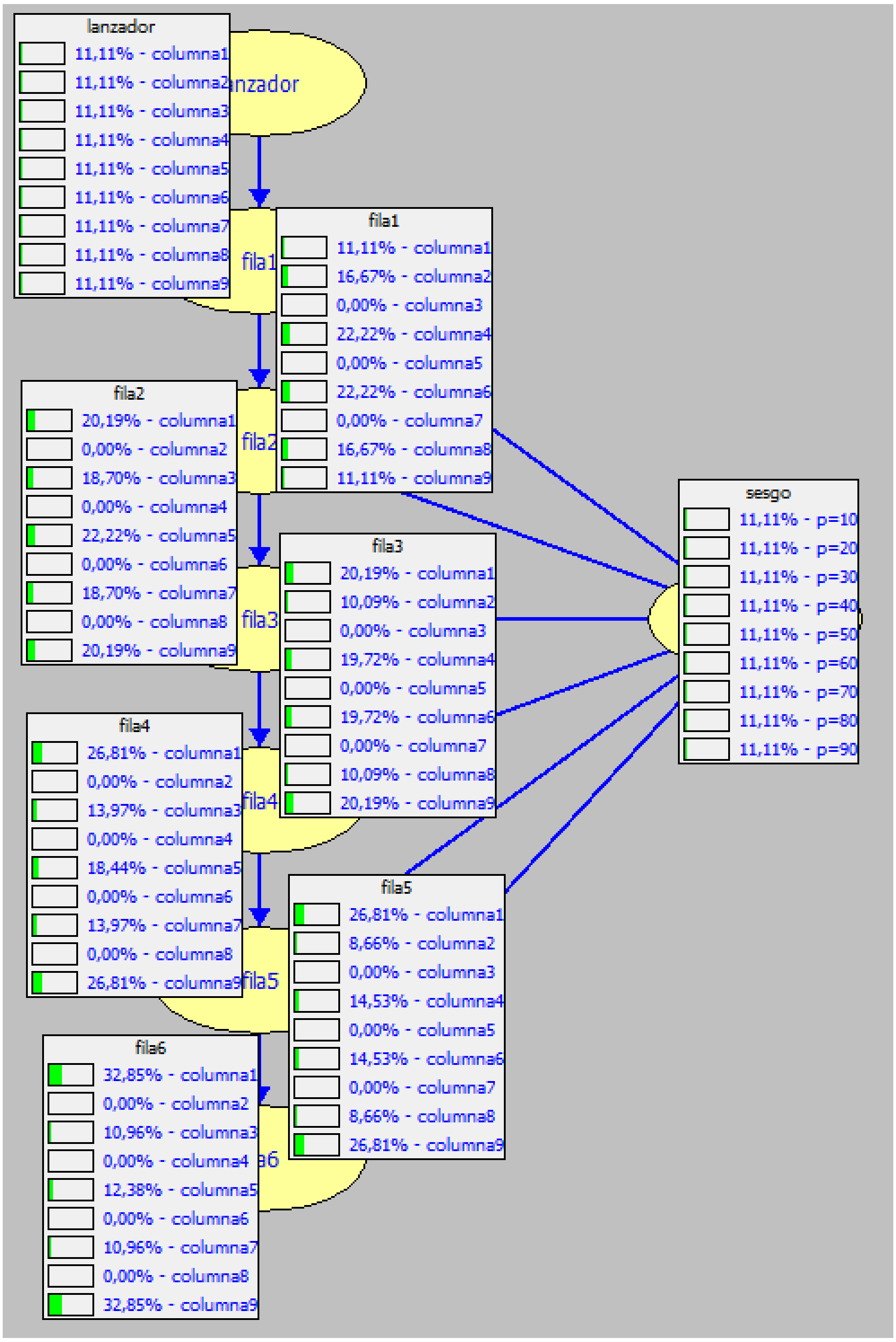

Figura 36: Red bayesiana definida para la extensión 2 sin ningún sesgo seleccionado

Para realizar definir el sesgo en todos las filas se han tenido que modificar todas las tablas de probabilidad, cambiando en todos los casos que era 0.5, dependiendo de la p seleccionada unos valores o otros, podemos ver un ejemplo de ello en la figura 37, todas las tablas se han modificado de igual manera en las columnas concretas.

fila1	columna1									columna2								
sesgo	p=10	p=20	p=30	p=40	p=50	p=60	p=70	p=80	p=90	p=10	p=20	p=30	p=40	p=50	p=60	p=70	p=80	p=90
columna1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
columna2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
columna4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
columna9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Figura 37: Tabla de probabilidad añadiendo el sesgo

A continuación se muestran algunos ejemplos de ejecución donde se muestra que las probabilidades de que llegue a las diferentes columnas ahora son diferentes, para ello usaremos alguna j y j' de las preguntas resueltas en la primera parte. Pero primero, en la figura 38 podemos ver una comparación donde se muestra que con sesgo 50, la red muestra las mismas probabilidades que en la red original, por tanto podemos decir que funciona de manera correcta o al menos de manera esperada.

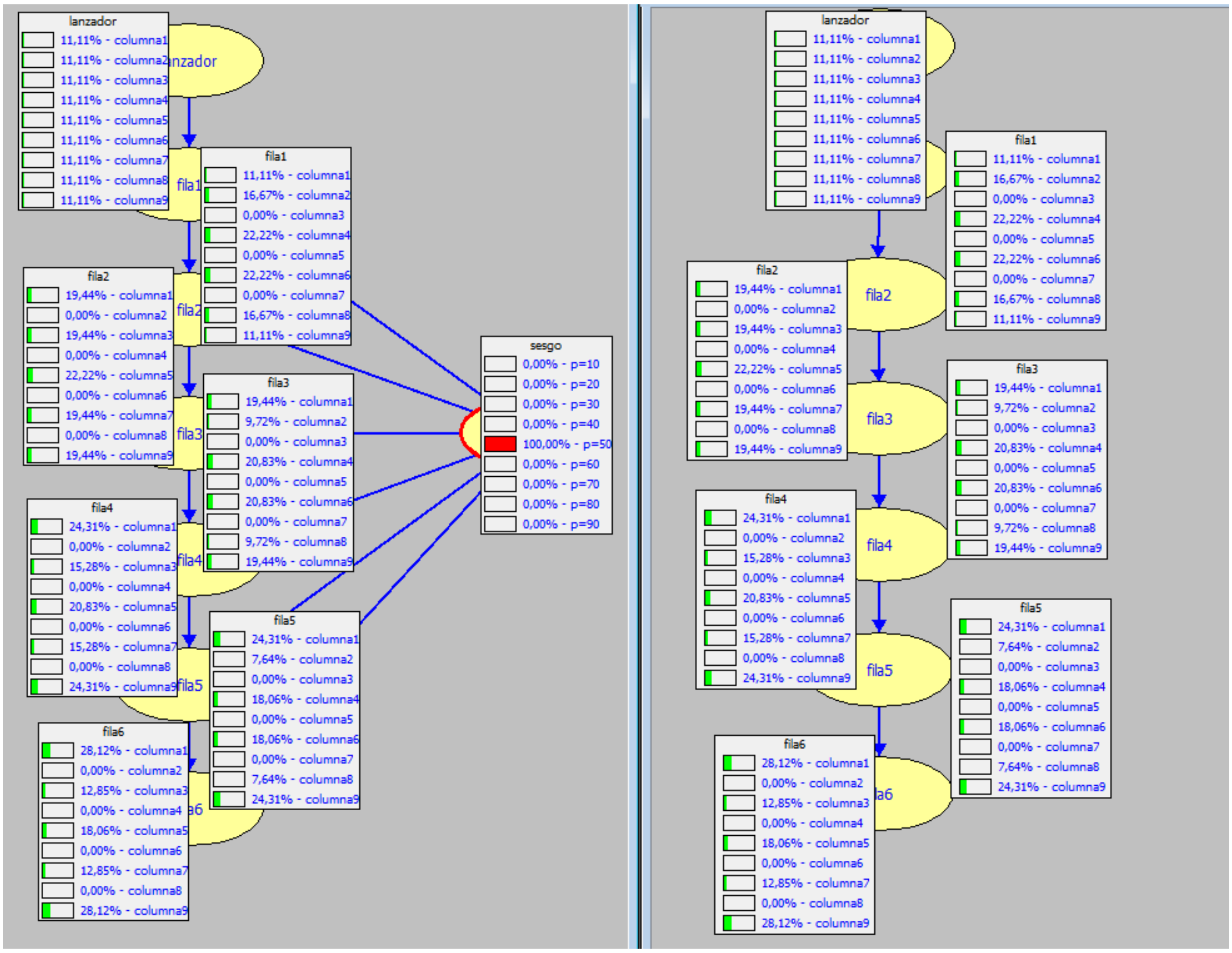

Figura 38: Comparación de la red con sesgo 50 y la red original

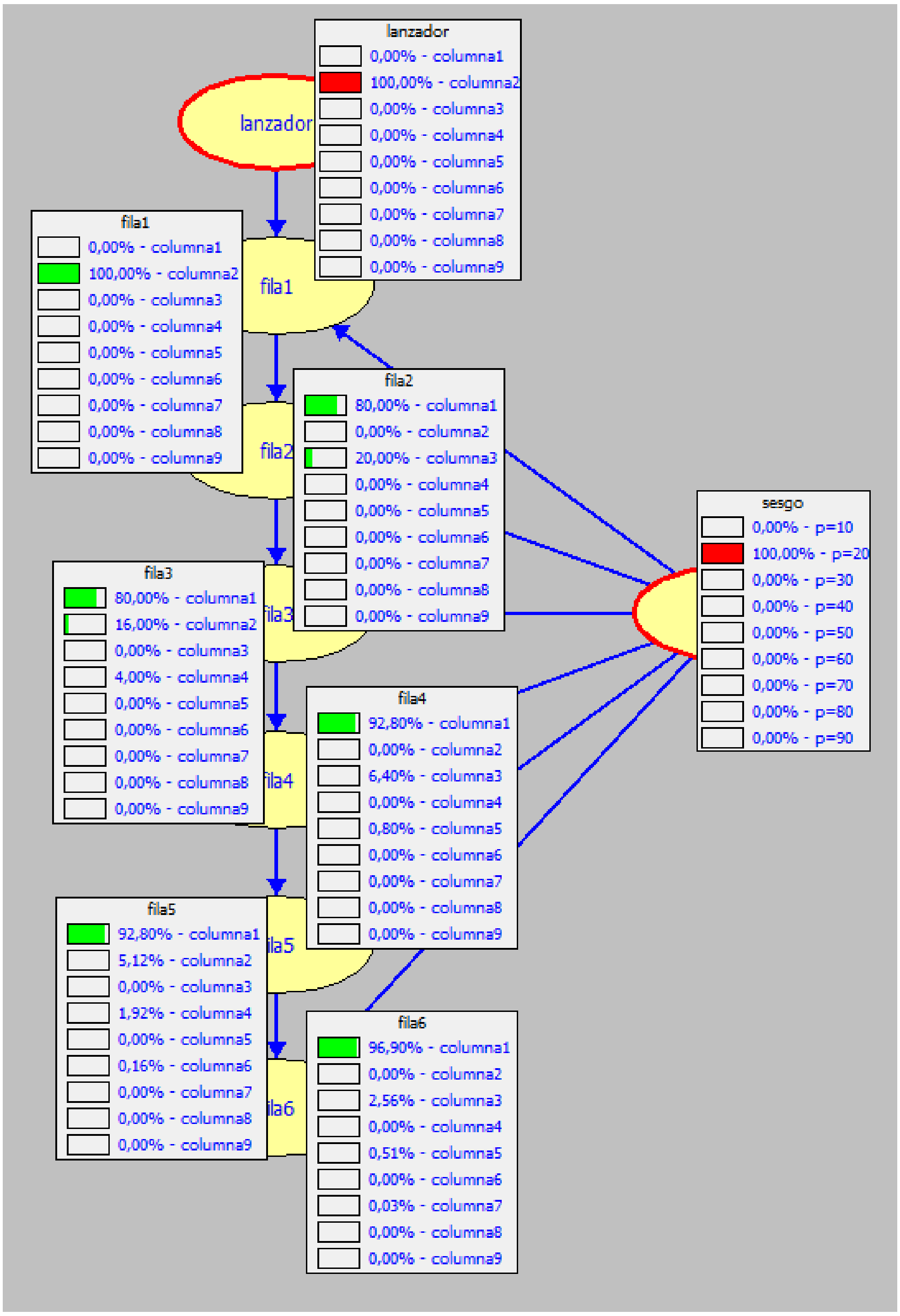

Figura 39: Lanzada por la columna 2 con sesgo 20

Para j = 2, la probabilidad de que llegue a la columna $j' = 7$ con un sesgo de 50 es de **12.50 %** con el nuevo sesgo de 20 indicado en la figura 39 ha disminuido al **0.03 %**.

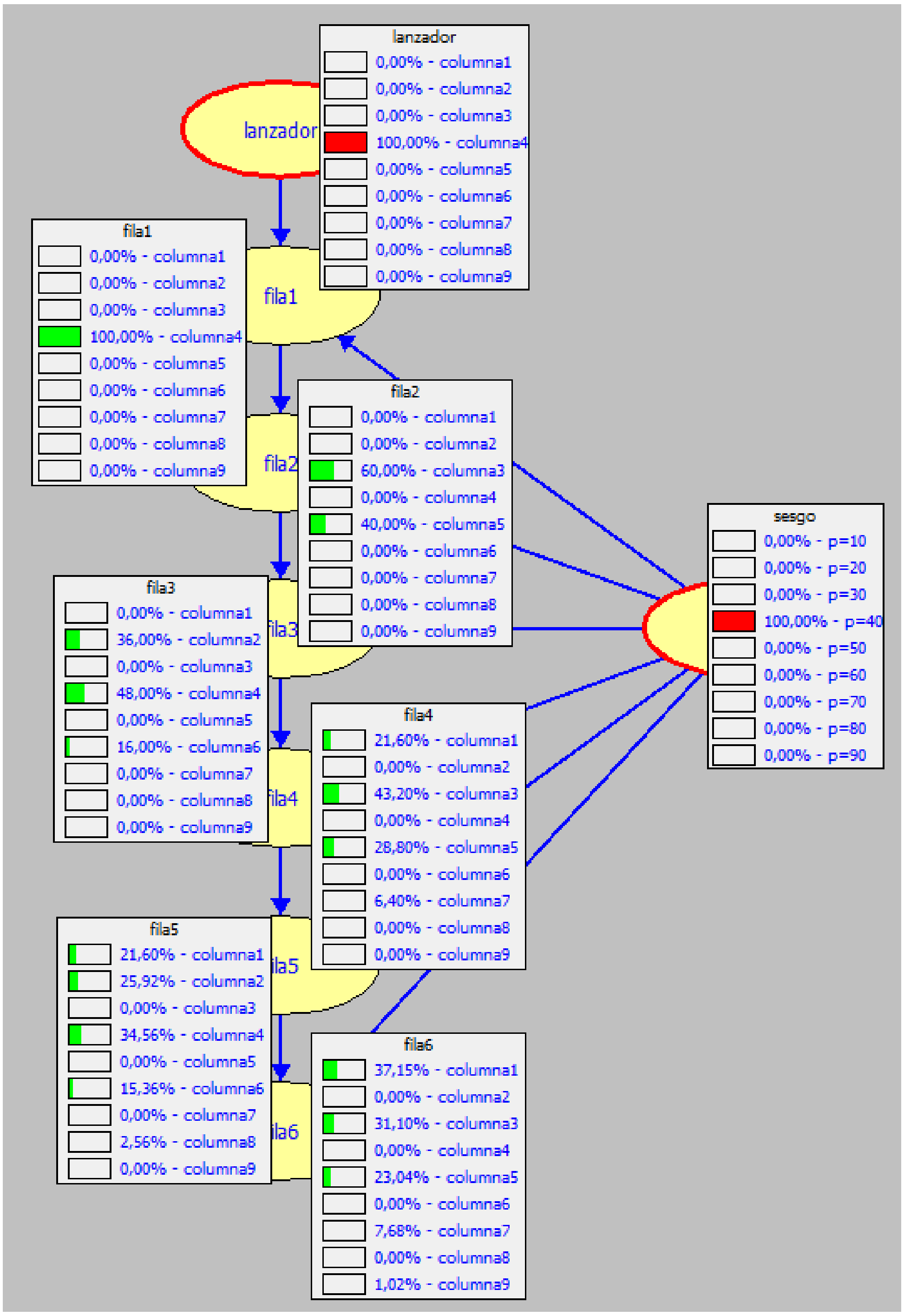

Figura 40: Lanzada por la columna 4 con sesgo 40

Para j = *4*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *3* con un sesgo de 50 es de **28.12 %** con el nuevo sesgo del 40 indicado en la figura 40 ha aumentado al **31.10 %**

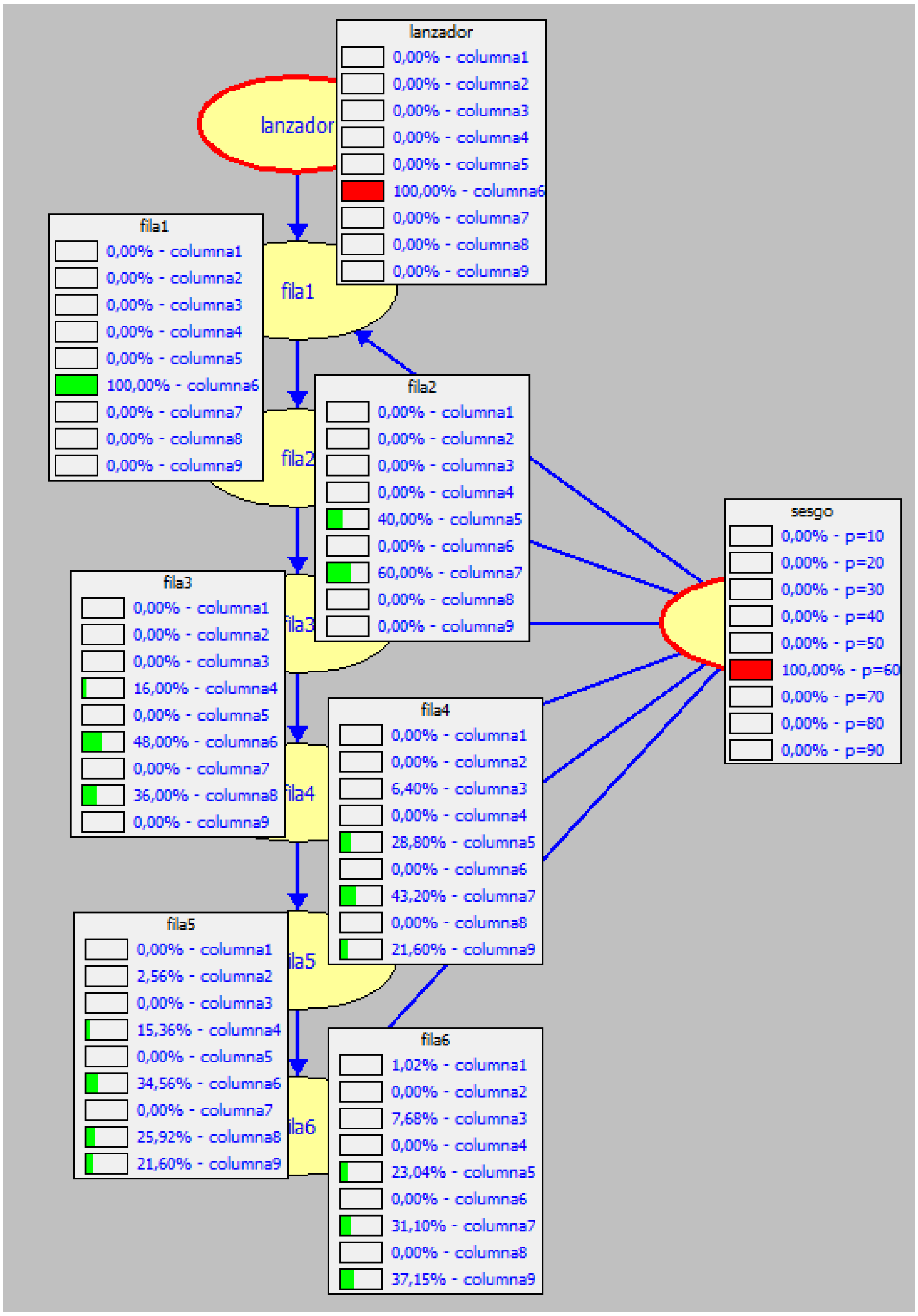

Figura 41: Lanzada por la columna 6 con sesgo 60

Para j = *6*, la probabilidad de que llegue a la columna j' = *9* con un sesgo de 50 es de **21.87 %** con el nuevo sesgo del 60 indicado en la figura 41 ha aumentado al **37.15 %**

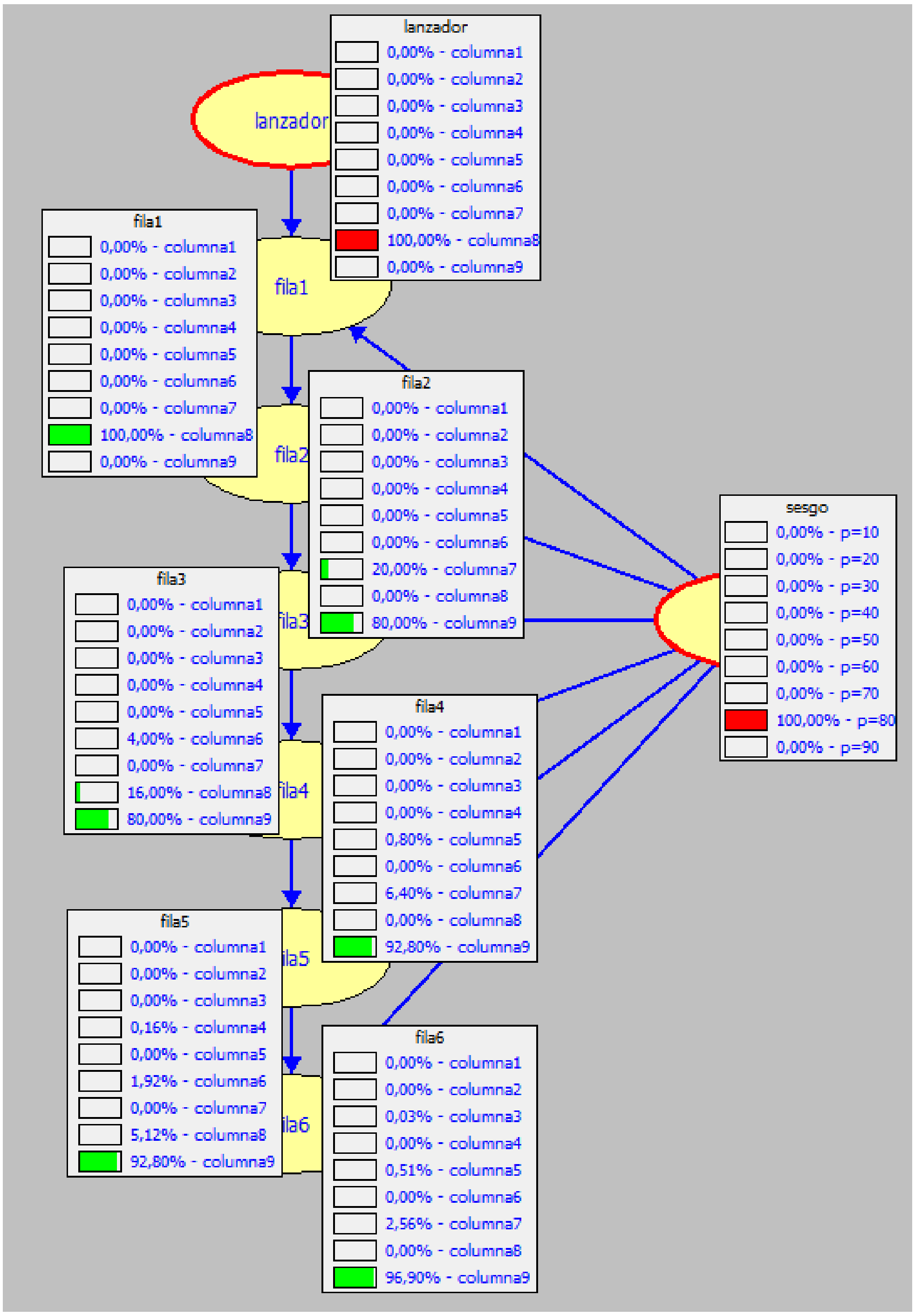

Figura 42: Lanzada por la columna 8 con sesgo 20

Para j = *8*, la probabilidad de que llegue a la columna *j'* = *5* con un sesgo de 50 es de **12.50 %** con el nuevo sesgo del 80 indicado en la figura 42 ha disminuido al **0.51 %**