动态规划的优化

谢兴宇

计算机科学与技术系，清华大学

前置知识：凸包

欧几里得空间中的概念，一般考虑二维情形。

- 凸集：一个点集合，每两点的连线都落在该点集合中。
- 凸包：所有包含点集X的凸集的交集。

点集X的凸包是一个由点集X的若干个点构成的凸多边形，使得X中的所有点都在其内部或边界上。

凸包：约定

- 点集大小：n
- 凸包大小：h
- 暂且不考虑特殊情况：有三点共线，点数不超过2.

凸包：性质

- 给定向量A，使$A \cdot x$最大的x在凸包上。
- 在有限域$\mathcal{A}$中随机n个点，其凸包的期望大小为：
  - 若$\mathcal{A}$为圆盘：$O(n^{1/3})$
  - 若$\mathcal{A}$为二维k凸多边形：$O(k \log n)$
  - 若$\mathcal{A}$为各边与坐标轴平行的d维超立方体：$O(\log^{d-1} n)$

凸包：求解

算法

- Gift wrapping
  - 时间复杂度：$O(nh)$
  - 求出前i个点的凸包，利用极角判断第$i+1$个点是否在前i个点的凸包中。
- Graham scan
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$
  - 以极角序将点加入凸包中。
- Monotone chain, a.k.a Andrew's algorithm
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$
  - 按x轴坐标排序，分别求上下凸包。

凸包：求解

- Quick hull
  - 时间复杂度：期望$O(n\log n)$，最坏$O(n^2)$
  - 将坐标系随机旋转一个角度，找到x坐标最小和最大的点，找到距离其连线最远的点，舍去此三点构成三角形内部的点，再对三角形其他二边继续递归下去。
- Divide and conquer
  - 时间复杂度：$O(n\log n)$
  - 按x分治，合并时首先选取左凸包最右点和右凸包最左点，考虑二者相连的线段，然后不断依次移动线段的右端点和左端点，直至两个凸包均完全在凸包的一侧。这样找到两条support line，舍去两条support line之间的点，便得到新的凸包。

决策单调性

状态转移方程形如$f_i = \min_{1 \le j < i} g_j$。

记$\boldsymbol{i}$在$\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{x}_i$处取到最优解，若$\boldsymbol{x}_i$单调，则称该动态规划具有决策单调性。

决策单调性：例子

$f_i = \max_{1 \le j < i}(a_j + \sqrt{i - j})$

决策单调性：解法

分治：时间复杂度$O(n\log n)$

$solve(l,r,L,R)$表示已知$i\in[l,r]$时，$x_i\in[L,R]$，求$x_i,i\in[l,r]$。

对于$mid=(l+r)/2$，找到x_{mid}，递归处理$solve(l,mid-1,L,x_{mid}),solve(mid+1,r,x_{mid},R)$。

斜率优化

状态转移方程形如$f_i = F(\min_{1\le j<i}(a_ig_j + b_ih_j))$。

斜率优化：解法

将(g_j, h_j)考虑成坐标系中的点，则$\min$必由凸包转移而来。

一般而言，需要用平衡树动态维护凸包。

若g_j单调，可以用单调栈维护。

斜率优化：例题

土地购买

Farmer Jhon需要购买n块长方形的土地，其中第i块土地的长为a_i，宽为b_i。每块土地的价格是它的面积，Farmer Jhon可以同时购买多块土地，同时购买多块土地的价格是它们最大的长乘以最大的宽。

FJ希望你可以告诉他，买下所有土地需要的最小花费。

$n \leq 10^6$

土地购买：解法

若$\exists j, s.t. a_i \le a_j, b_i \le b_j$，则土地$i$可与土地$j$一起购买，我们便可以舍去土地$i$。

将所有土地按a_i排序，使用单调栈保留土地，则保留下来的土地b_i递减。

记状态f_i表示购买前i块土地的最小花费，则
$f_i = \min_{1 \le j < i}(a_i b_{j+1} + f_j)$。

由于a_i, b_i, f_i均单调，决策也单调。

时间复杂度：$O(n)$

四边形不等式

形如$f_{l,r}=\min_{l\le k<r}(f_{l,k}+f_{k+1,r})+w_{l,r}$的状态转移方程。

若$\forall l_1\le l_2\le r_1\le r_2, f_{l_1,r_1}+f_{l_2,r_2}\le f_{l_1,r_2}+f_{l_2,r_1}$成立，则称函数$f$满足四边形不等式。

四边形不等式优化

优化定理：若f满足四边形不等式，
$x_{l,r} = \arg\min_{l \le k < r}(f_{l,k} + f_{k+1,r})$，则
$x_{l,r-1} \le x_{l,r} \le x_{l+1,r}$。

证明思路：只需说明$[(f_{l,k} + f_{k+1,r}) - (f_{l,x} + f_{x+1,r})] - [(f_{l,k} + f_{k+1,r+1}) - (f_{l,x} + f_{x+1,r+1})] \le 0$，其中$x = x_{l,r}$。

四边形不等式定理：若w满足四边形不等式，则f也满足四边形不等式。

证明思路：考虑x_{l_1,r_2}对f_{l_1,r_1}的贡献和x_{l2,r_1}对f_{l_2,r_2}的贡献。

这样，我们可以将DP的时间复杂度由$O(n^3)$降为$O(n^2)$。

四边形不等式：例题

石子合并

将n堆石子合并成一堆，第i堆石子的重量为a_i，合并所需的代价为合并后的石子重量，最小化合并代价。

$n \leq 5000$

参考文献

- https://en.wikipedia.org/
- Sariel Har-Peled. On the Expected Complexity of Random Convex Hulls. 2011.
- 1D/1D动态规划优化初步
- 赵爽. 动态规划加速原理之四边形不等式.