第十章

隐马尔科夫模型

袁春 清华大学深圳研究生院
李航 华为诺亚方舟实验室

目录

一、隐马尔科夫模型的基本概念

- 隐马尔科夫模型的定义
- 观测序列的生成过程
- 应马尔科夫模型的3个基本问题

隐马尔科夫模型的定义

- 隐马尔可夫模型是关于时序的概率模型;
- 描述由一个隐藏的马尔可夫链随机生成不可观测的状态随机序列(state sequence)，再由各个状态生成一个观测而产生观测随机序列(observation sequence)的过程,序列的每一个位置又可以看作是一个时刻。

隐马尔科夫模型

- 组成
  - 初始概率分布
  - 状态转移概率分布
  - 观测概率分布
  - Q：所有可能状态的集合
  - V：所有可能观测的集合

  - I: 长度为T的状态序列

$$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_N\}, \quad V=\{v_1,v_2,\cdots,v_M\}$$

  - O：对应的观测序列

$$I=(i_1,i_2,\cdots,i_T), \quad O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$$

隐马尔科夫模型

- 组成
  - A：状态转移概率矩阵

$$A=\left[a_{ij}\right]_{N\times N}$$

$$a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j\mid i_t=q_i)\,,\qquad i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,N$$

时刻 t 处于状态 q_i 的条件下在时刻 $t+1$ 转移到状态 q_j 的概率

隐马尔科夫模型

- 组成
  - B：观测概率矩阵

$$B=\left[b_j(k)\right]_{N\times M}$$

$$b_j(k)=P(o_t=v_k \mid i_t=q_j)\,,\quad k=1,2,\cdots,M;\ j=1,2,\cdots,N$$

在时刻 t 处于状态 q_j 的条件下生成观测 v_k 的概率

  - π 初始状态概率向量

$$\pi_i=P(i_1=q_i)\,,\quad i=1,2,\cdots,N$$

时刻 $t=1$ 处于状态 q_i 的概率

隐马尔科夫模型

- 三要素

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

- 两个基本假设
  - 齐次马尔科夫性假设，隐马尔可分链t的状态只和t-1状态有关：

$$P(i_t \mid i_{t-1}, o_{t-1}, \cdots, i_1, o_1) = P(i_t \mid i_{t-1}), \quad t = 1, 2, \cdots, T$$

  - 观测独立性假设，观测只和当前时刻状态有关；

$$P(o_t \mid i_T, o_T, i_{T-1}, o_{T-1}, \cdots, i_{t+1}, o_{t+1}, i_t, i_{t-1}, o_{t-1}, \cdots, i_1, o_1) = P(o_t \mid i_t)$$

例：盒子和球模型

- 盒子: 1 2 3 4
- 红球: 5 3 6 8
- 白球: 5 7 4 2

- 转移规则:
  - 盒子1 下一个 盒子2
  - 盒子2或3 下一个 0.4 左，0.6右
  - 盒子4 下一个 0.5 自身，0.5盒子3
- 重复5次: O={ 红，红，白，白，红}

例：盒子和球模型

- 状态集合：Q={盒子1，盒子2，盒子3，盒子4}， N=4
- 观测集合：V={红球，白球} M=2
- 初始化概率分布：
- 状态转移矩阵：$\pi = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$ 观测矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

观测序列的生成过程

算法 10.1（观测序列的生成）

输入：隐马尔可夫模型 $\lambda=(A,B,\pi)$，观测序列长度 T；

输出：观测序列 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$.

（1）按照初始状态分布 π 产生状态 i_1

（2）令 $t=1$

（3）按照状态 i_t 的观测概率分布 $b_{i_t}(k)$ 生成 o_t

（4）按照状态 i_t 的状态转移概率分布 $\{a_{i_t i_{t+1}}\}$ 产生状态 i_{t+1}， $i_{t+1}=1,2,\cdots,N$

（5）令 $t=t+1$；如果 $t<T$，转步 (3)；否则，终止

隐马尔科夫模型的三个基本问题

- 1、概率计算问题
- 给定：
- 计算： $\lambda=(A,B,\pi)$ $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$
- 2、学习问题 $P(O|\lambda)$
- 已知：
- 估计： $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 最大
- 3、预测问题 $\lambda=(A,B,\pi)$ $P(O|\lambda)$
- 已知：
- 求：使 $\lambda=(A,B,\pi)$ 最大的状态序列 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$

$P(I|O)$ $I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$

概率计算方法

- 直接计算法
  - 给定模型： 和观测概率：
  - 计算： $\lambda=(A,B,\pi)$ $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$
- 最直接的$P(O|\lambda)$
  - 列举所有可能的长度为T状态序列 ，
  - 求各个状态序列I与观测序列 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$联合概率
  - 然后对所有可能的状态序列 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$

$P(O,I|\lambda)$

$P(O|\lambda)$

二、概率计算算法

- 直接计算法
- 前向算法
- 后向算法
- 一些概率与期望值的计算

概率计算方法

- 直接计算法
  - 状态序列 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$ 概率：$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{T-1}i_T}$
  - 对固定的状……序列O…… $P(O|I,\lambda)$

    $$P(O|I,\lambda)=b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\cdots b_{i_T}(o_T)$$

  - O和I同时……

    $$\begin{aligned}P(O,I|\lambda)&=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)\\&=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)\end{aligned}$$

  - 对所有可……：

$$\begin{aligned}P(O|\lambda)&=\sum_I P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)\\&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_T}\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)\end{aligned}$$

复杂度

$O(TN^T)$

前向算法

- 前向概率定义：给定隐马尔科夫模型λ，定义到时刻t部分观测序列为：$o_1,o_2,\cdots,o_t$ ，且状态为qi的概率为前向概率，记作： $\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,i_t=q_i\mid\lambda)$

算法 10.2（观测序列概率的前向算法）

输入：隐马尔可夫模型 λ，观测序列 O；

输出：观测序列概率 $P(O\mid\lambda)$.

- 初值： $\alpha_1(i)=\pi_i b_i(o_1)$ ， $i=1,2,\cdots,N$
- 递推：

$$\alpha_{t+1}(i)=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)a_{ji}\right]b_i(o_{t+1})\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

- 终止：

$$P(O\mid\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_T(i)$$

前向算法

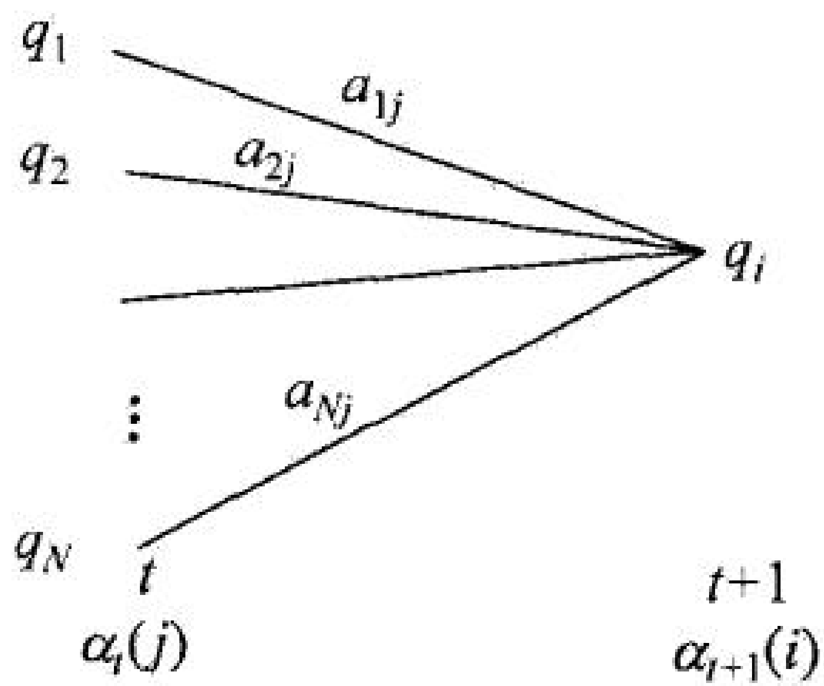
- 因为：

$$\alpha_T(i) = P(o_1, o_2, \cdots, o_T, i_T = q_i \mid \lambda)$$

- 所以：

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

- 递推：



复杂度

$$O(N^2T)$$

前向算法

- 减少计算量的原因在于每一次计算，直接引用前一个时刻的计算结果，避免重复计算。

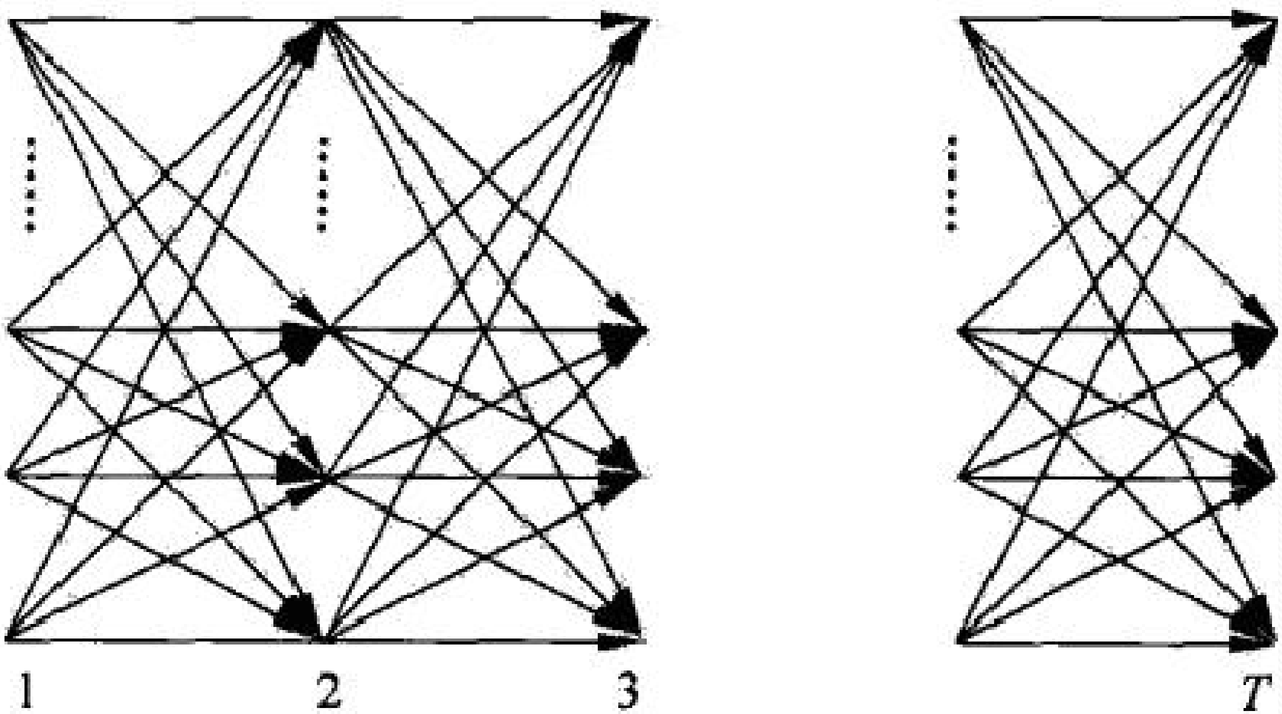


图 10.2　观测序列路径结构

复杂度

$O(N^2T)$

例：

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

设$T=3$，$O=$(红, 白, 红)，试用前向算法计算$P(O|\lambda)$

解 按照算法 10.2

（1）计算初值

$$\alpha_1(1)=\pi_1 b_1(o_1)=0.10$$
$$\alpha_1(2)=\pi_2 b_2(o_1)=0.16$$
$$\alpha_1(3)=\pi_3 b_3(o_1)=0.28$$

例：

（2）递推计算

$$\alpha_2(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i1}\right]b_1(o_2)=0.154\times0.5=0.077$$

$$\alpha_2(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i2}\right]b_2(o_2)=0.184\times0.6=0.1104$$

$$\alpha_2(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i3}\right]b_3(o_2)=0.202\times0.3=0.0606$$

$$\alpha_3(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i1}\right]b_1(o_3)=0.04187$$

$$\alpha_3(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i2}\right]b_2(o_3)=0.03551$$

$$\alpha_3(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i3}\right]b_3(o_3)=0.05284$$

例：

（3）终止

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_3(i)=0.13022$$

后向算法

- 定义10.3 后向概率：给定隐马尔科夫模型λ，定义在时刻t状态为qi的条件下，从t+1到T的部分观测序列为：的概率为后向概率，记作：

$$o_{t+1}, o_{t+2}, \cdots, o_T$$

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \cdots, o_T \mid i_t = q_i, \lambda)$$

可以用递推的方法求得后向概率 $\beta_t(i)$ 及观测序列概率 $P(O \mid \lambda)$

后向算法

算法 10.3 （观测序列概率的后向算法）

输入：隐马尔可夫模型λ，观测序列O；

输出：观测序列概率$P(O|\lambda)$.

（1）

$$\beta_T(i)=1,\quad i=1,2,\cdots,N$$

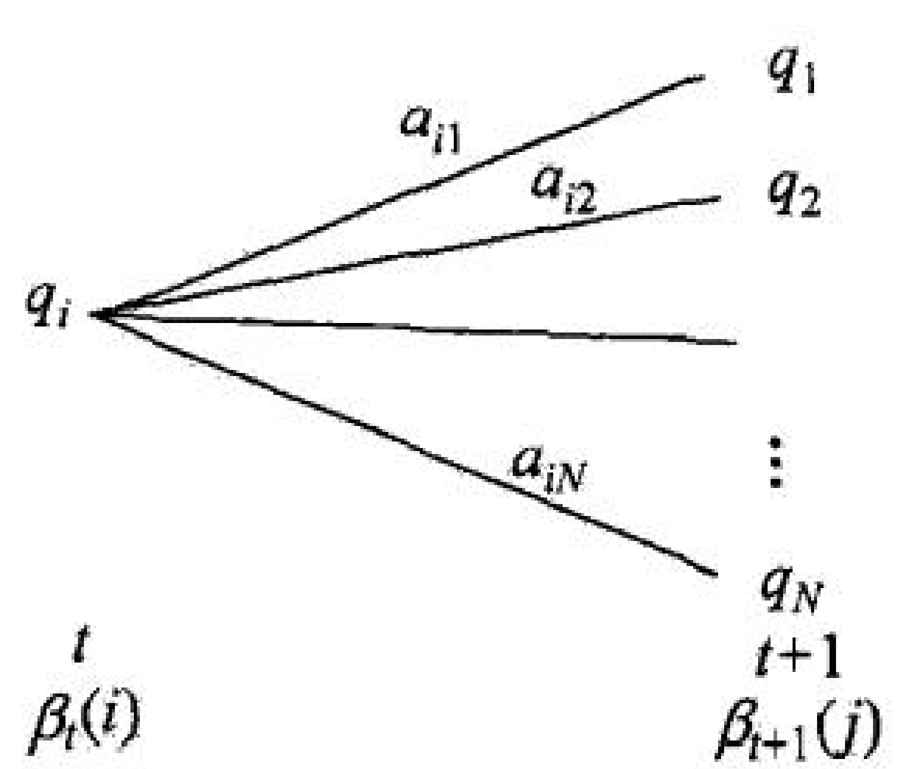
（2）对$t=T-1,T-2,\cdots,1$

$$\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j),\quad i=1,2,\cdots,N$$

（3）

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i b_i(o_1)\beta_1(i)$$

后向算法



- 前向后向统一写为：（ t=1 和t=T-1分别对应）

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)，\quad t=1,2,\cdots,T-1$$

一些概率和期望值的计算

1．给定模型 λ 和观测 O，在时刻 t 处于状态 q_i 的概率．

记 $\gamma_t(i) = P(i_t = q_i \mid O, \lambda)$

$$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i \mid O, \lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)}$$

$$\alpha_t(i)\beta_t(i) = P(i_t = q_i, O \mid \lambda)$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O \mid \lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

一些概率和期望值的计算

2．给定模型 λ 和观测 O，在时刻 t 处于状态 q_i 且在时刻 $t+1$ 处于状态 q_j 的概率．记

$$\xi_t(i,j)=P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j\mid O,\lambda)$$

通过前向后向概率计算:

$$\xi_t(i,j)=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\mid\lambda)}{P(O\mid\lambda)}=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\mid\lambda)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\mid\lambda)}$$

$$P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O\mid\lambda)=\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$$

$$\xi_t(i,j)=\frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}$$

一些概率和期望值的计算

3．将$\gamma_t(i)$和$\xi_t(i,j)$对各个时刻t求和，可以得到一些有用的期望值：

（1）在观测O下状态i出现的期望值

$$\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(i)$$

（2）在观测O下由状态i转移的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)$$

（3）在观测O下由状态i转移到状态j的期望值

$$\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)$$

三、学习算法

- 监督学习方法
- Baum-Welch 算法
- Baum-Welch模型参数估计公式

学习算法

- 监督学习方法：
  - 假设训练数据是包括观测序列O和对应的状态序列I

$$\{(O_1,I_1),(O_2,I_2),\cdots,(O_S,I_S)\}$$

  - 可以利用极大似然估计法来估计隐马尔可夫模型参数。
- 非监督学习方法：
  - 假设训练数据只有S个长度为T的观测序{O1,O2,...Os},
  - 采用Baum-Welch算法

监督学习方法

- 已知：
- 1、转移$\{(O_1,I_1),(O_2,I_2),\cdots,(O_S,I_S)\}$
- 设样本中时刻t处于状态i，时刻t+1转移到状态j的频数为A_{ij}，那么状态转移概率a_{ij}的估计是：

$$\hat{a}_{ij}=\frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^{N}A_{ij}},\quad i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,N$$

监督学习方法

- 已知：
- 2、观测$\{(O_1,I_1),(O_2,I_2),\cdots,(O_S,I_S)\}$设样本中状态为j并观测为k的频数是$B_j(k)$，那么状态为j观测为k的概率

$$\hat{b}_j(k)=\frac{B_{jk}}{\sum_{k=1}^{M}B_{jk}},\qquad j=1,2,\cdots,N\;;\;k=1,2,\cdots,M$$

- 3、初始状态概率 π_i 的估计 $\hat{\pi}_i$ 为S个样本中初始状态为qi的频率。
- 往往人工标注数据很贵

Baum-Welch算法

- 假定训练数据只包括{O1,O2,...Os},
- 求模型参数λ=（A,B,π)
- 实质上是有隐变量的概率模型：EM算法

$$P(O|\lambda)=\sum_{I}P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)$$

- 1、确定完全数据的对数似然函数
- 完全数据 $(O,I)=(o_1,o_2,\cdots,o_T,i_1,i_2,\cdots,i_T)$
- 完全数据的对数似然函数 $\log P(O,I|\lambda)$

Baum Welch算法

- 2、EM的E步

求 Q 函数 $Q(\lambda,\bar{\lambda})$

$$Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_I \log P(O,I\mid\lambda)P(O,I\mid\bar{\lambda})$$

- 则：

$$P(O,I\mid\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)$$

$$Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_I \log\pi_{i_1}P(O,I\mid\bar{\lambda})$$
$$+\sum_I\left(\sum_{t=1}^{T-1}\log a_{i_ti_{t+1}}\right)P(O,I\mid\bar{\lambda})+\sum_I\left(\sum_{t=1}^{T}\log b_{i_t}(o_t)\right)P(O,I\mid\bar{\lambda})$$

Baum Welch算法

- 3、EM算法的M 步，极大化 $Q(\lambda,\bar{\lambda})$ 求模型参数A,B,π

第一项：

$$\sum_{I}\log \pi_{i_0} P(O,I\mid\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N}\log \pi_i P(O,i_1=i\mid\bar{\lambda})$$

由约束条件： $\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$ 利用拉格朗日乘子：

$$\sum_{i=1}^{N}\log \pi_i P(O,i_1=i\mid\bar{\lambda}) + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i - 1\right)$$

求偏导数，并结果为0

- $$\frac{\partial}{\partial \pi_i}\left[\sum_{i=1}^{N}\log \pi_i P(O,i_1=i\mid\bar{\lambda}) + \gamma\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_i - 1\right)\right] = 0$$
- 得：

$$P(O,i_1=i\mid\bar{\lambda}) + \gamma\pi_i = 0 \qquad \gamma = -P(O\mid\bar{\lambda}) \qquad \pi_i = \frac{P(O,i_1=i\mid\bar{\lambda})}{P(O\mid\bar{\lambda})}$$

学习算法 Baum Welch算法

- 3、EM算法的M 步，极大化 求A,B,π

第二项可写成： $Q(\lambda,\bar{\lambda})$

$$\sum_I\left(\sum_{t=1}^{T-1}\log a_{i_t i_{t+1}}\right)P(O,I\mid\bar{\lambda})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}\log a_{ij}P(O,i_t=i,i_{t+1}=j\mid\bar{\lambda})$$

由约束条件 ，拉格朗日乘子法：

- 得： $\sum_{j=1}^{N}a_{ij}=1$

$$a_{ij}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}P(O,i_t=i,i_{t+1}=j\mid\bar{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1}P(O,i_t=i\mid\bar{\lambda})}$$

Baum Welch算法

- 3、EM算法的M 步，极大化 $Q(\lambda,\bar{\lambda})$求A,B,π

第三项：

$$\sum_{I}\left(\sum_{t=1}^{T}\log b_{i_t}(o_t)\right)P(O,I\mid\bar{\lambda})=\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\log b_j(o_t)P(O,i_t=j\mid\bar{\lambda})$$

由约束条件：

$$\sum_{k=1}^{M}b_j(k)=1$$

注意，只有在 $o_t=v_k$ 时 $b_j(o_t)$ 对 $b_j(k)$ 的偏导数才不为 0，以 $I(o_t=v_k)$ 表示．求得

$$b_j(k)=\frac{\sum_{t=1}^{T}P(O,i_t=j\mid\bar{\lambda})I(o_t=v_k)}{\sum_{t=1}^{T}P(O,i_t=j\mid\bar{\lambda})}$$

学习算法 Baum Welch算法

- 将已上得到的概率分别用 $\gamma_t(i)$， $\xi_t(i,j)$ 表示：

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1, o_t=v_k}^{T} \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}$$

$$\pi_i = \gamma_1(i)$$

算法 10.4（Baum-Welch 算法）

输入：观测数据 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$；

输出：隐马尔可夫模型参数.

（1）初始化

对 $n=0$，选取 $a_{ij}^{(0)}$，$b_j(k)^{(0)}$，$\pi_i^{(0)}$，得到模型 $\lambda^{(0)}=(A^{(0)},B^{(0)},\pi^{(0)})$

（2）递推. 对 $n=1,2,\cdots$，

$$a_{ij}^{(n+1)}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)}$$

$$b_j(k)^{(n+1)}=\frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T}\gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(j)}$$

$$\pi_i^{(n+1)}=\gamma_1(i)$$

右端各值按观测 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 和模型 $\lambda^{(n)}=(A^{(n)},B^{(n)},\pi^{(n)})$ 计算

（3）终止. 得到模型参数 $\lambda^{(n+1)}=(A^{(n+1)},B^{(n+1)},\pi^{(n+1)})$

四、预测算法

- 近似算法
- 维特比算法

近似算法算法

- 想法：在每个时刻t选择在该时刻最有可能出现的状态 i_t^* ，从而得到一个状态序列 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \cdots, i_T^*)$ ，将它作为预测的结果，在时刻t处于状态qi的概率：

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

- 在每一时刻t最有可能的状态是：

从而得到状态序列：$i_t^* = \arg\max_{1 \leqslant i \leqslant N}[\gamma_t(i)]$， $t = 1, 2, \cdots, T$

得到的状态有可能实际不发生 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \cdots, i_T^*)$

维特比算法

- Viterbi 方法
- 用动态规划解概率最大路径，一个路径对应一个状态序列。
- 最优路径具有这样的特性：如果最优路径在时刻t通过结点 i_t^* ，那么这一路径从结点 i_t^* 到终点 i_T^* 的部分路径，对于从 i_t^* 到 i_T^* 的所有可能的部分路径来说，必须是最优的。
- 只需从时刻t=1开始，递推地计算在时刻t状态为i的各条部分路径的最大概率，直至得到时刻t=T状态为i的各条路径的最大概率，时刻t=T的最大概率即为最优路径的概率P*，最优路径的终结点 i_T^* 也同时得到。
- 之后，为了找出最优路径的各个结点，从终结点开始，由后向前逐步求得结点 $i_{T-1}^*,\cdots,i_1^*$ ，得到最优路径

$$I^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$$

维特比算法

- 导入两个变量δ和ψ，定义在时刻t状态为i的所有单个路径 $(i_1, i_2, \cdots, i_t)$ 中概率最大值为：

$$\delta_t(i) = \max_{i_1, i_2, \cdots, i_{t-1}} P(i_t = i, i_{t-1}, \cdots, i_1, o_t, \cdots, o_1 \mid \lambda), \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

- 由定义可得变量δ的递推公式：

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}(i) &= \max_{i_1, i_2, \cdots, i_t} P(i_{t+1} = i, i_t, \cdots, i_1, o_{t+1}, \cdots, o_1 \mid \lambda) \\ &= \max_{1 \leqslant j \leqslant N} [\delta_t(j) a_{ji}] b_i(o_{t+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, N; \ t = 1, 2, \cdots, T-1 \end{aligned}$$

- 定义在时刻t状态为i的所有单个路径 $(i_1, i_2, \cdots, i_{t-1}, i)$ 中概率最大的路径的第t-1个结点为

$$\psi_t(i) = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant N} [\delta_{t-1}(j) a_{ji}], \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

Viterbi 方法

算法 10.5（维特比算法）

输入：模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$；

输出：最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$．

（1）初始化

$$\delta_1(i)=\pi_i b_i(o_1)\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

$$\psi_1(i)=0\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

（2）递推．对 $t=2,3,\cdots,T$

$$\delta_t(i)=\max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}]b_i(o_t)\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

$$\psi_t(i)=\arg\max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}]\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

Viterbi 方法

（3）终止

$$P^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \delta_T(i)$$

$$i_T^* = \arg\max_{1 \leqslant i \leqslant N} [\delta_T(i)]$$

（4）最优路径回溯．对 $t = T-1, T-2, \cdots, 1$

$$i_t^* = \psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$$

求得最优路径 $I^* = (i_1^*, i_2^*, \cdots, i_T^*)$

例

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

$O=$(红, 白, 红)，试求最优状态序列，即最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,i_3^*)$

- 1、初始化：在t=1时，对每一个状态i，i=1,2,3，求状态i观测O1为红的概率，记为：$\delta_1(i)$
- 代入实际数据： $\delta_1(i)=\pi_i b_i(o_1)=\pi_i b_i(\text{红})$， $i=1,2,3$

$$\delta_1(1)=0.10,\quad \delta_1(2)=0.16,\quad \delta_1(3)=0.28$$

记 $\psi_1(i)=0$， $i=1,2,3$

例

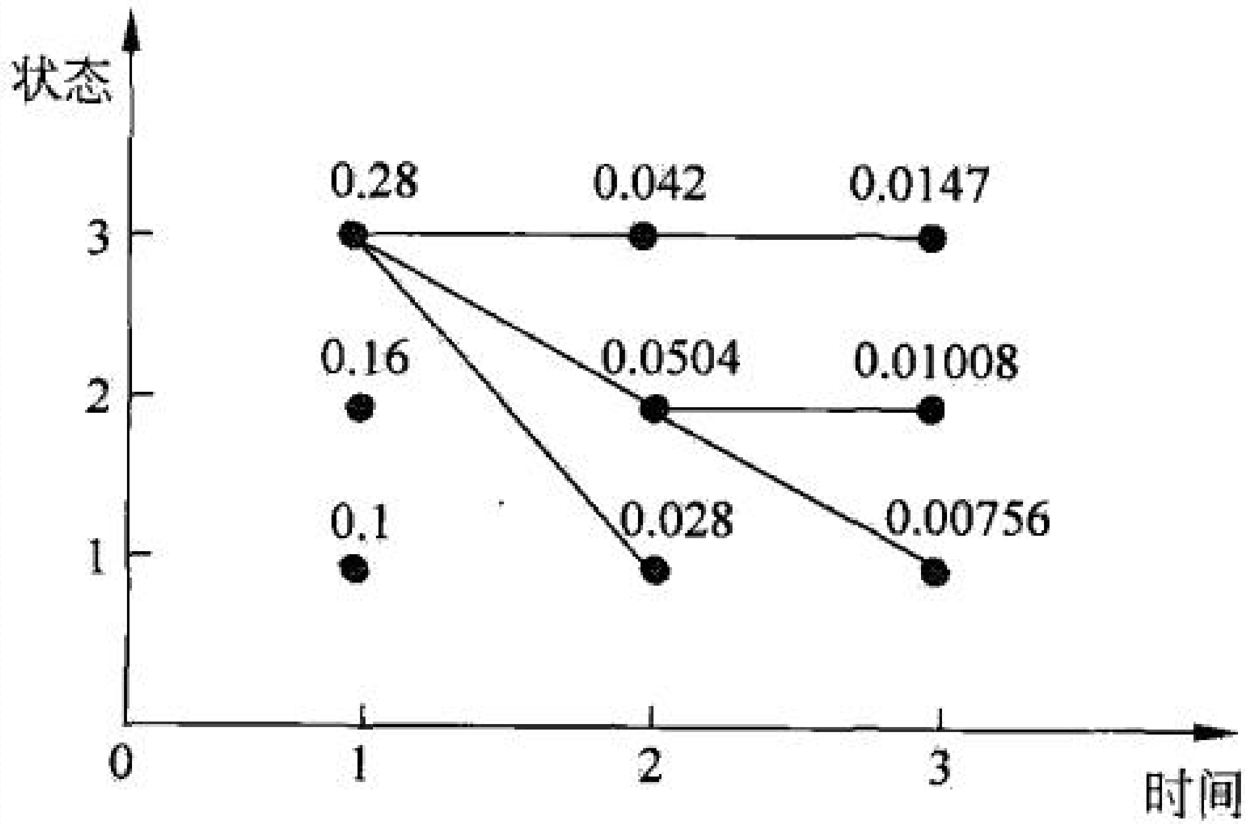


图 10.4 求最优路径

例

- 2、在t=2时，对每一个状态i，i=1,2,3，求在t=1时状态为j观测O1为红并在t=2时状态为i观测O2位白的路径的最大概率，记为

$$\delta_2(i)$$

$$\delta_2(i) = \max_{1 \leqslant j \leqslant 3} [\delta_1(j) a_{ji}] b_i(o_2)$$

- 同时，对每个状态i，记录概率最大路径的前一个状态j

$$\psi_2(i) = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant 3} [\delta_1(j) a_{ji}], \quad i = 1,2,3$$

例

计算：

$$\delta_2(1) = \max_{1 \leqslant j \leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j1}]b_1(o_2)$$

$$= \max_j\{0.10 \times 0.5, 0.16 \times 0.3, 0.28 \times 0.2\} \times 0.5$$

$$= 0.028$$

$$\psi_2(1) = 3$$

$$\delta_2(2) = 0.0504, \quad \psi_2(2) = 3$$

$$\delta_2(3) = 0.042, \quad \psi_2(3) = 3$$

同样，在 $t = 3$ 时

$$\delta_3(i) = \max_{1 \leqslant j \leqslant 3}[\delta_2(j)a_{ji}]b_i(o_3)$$

$$\psi_3(i) = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant 3}[\delta_2(j)a_{ji}]$$

$$\delta_3(1) = 0.00756, \quad \psi_3(1) = 2$$

$$\delta_3(2) = 0.01008, \quad \psi_3(2) = 2$$

$$\delta_3(3) = 0.0147, \quad \psi_3(3) = 3$$

例

- 3、以P*表示最优路径的概率：

$$P^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \delta_3(i) = 0.0147$$

- 最优路径的终点是：

$$i_3^* = \arg\max_i [\delta_3(i)] = 3$$

- 4、由最优路径的终点 i_3^*，逆向找到 i_2^*, i_1^*

在 $t=2$ 时， $i_2^* = \psi_3(i_3^*) = \psi_3(3) = 3$

在 $t=1$ 时， $i_1^* = \psi_2(i_2^*) = \psi_2(3) = 3$

- 于是求得最优路径，即最优状态序列：

$$I^* = (i_1^*, i_2^*, i_3^*) = (3,3,3)$$

- END
- Q&R